MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

ŞCOALA GIMNAZIALA nr. 56 – BUCUREŞTI

Concursul Interjudeţean de Matematică al Şcolii Gimnaziale nr. 56
Ediţia a XIII - a, 25.01.2014

Clasa a VII -a

1. Pentru câte valori naturale ale lui *n*, $n < 100$, numărul $N = 2^n \cdot (2n)^3$ este pătrat perfect.

2. Se consideră triunghiul *ABC*, $AB = AC$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $CN = AM$. Dacă *P* este mijlocul segmentului $[CM]$ şi *Q* este mijlocul segmentului $[AN]$, arătaţi că $PQ \perp BC$.

3. Determinaţi toate numerele întregi *n* pentru care numărul $\dfrac{n^3+1}{n^2-3}$ este natural.

4. Se consideră triunghiul *ABC* în care există punctele *M*, *N* şi *P* sunt situate pe laturile $[AB]$, $[AC]$ şi respectiv $[BC]$ astfel încât $MN \parallel BC$, $MN = NC$ şi $\widehat{NPB} \equiv \widehat{BAC}$. Demonstraţi că $NP = AM$.

SUCCES!

Notă:
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
- Timp de lucru efectiv : 3 ore.

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

ŞCOALA GIMNAZIALA nr. 56 – BUCUREŞTI

Concursul Interjudeţean de Matematică al Şcolii gimnaziale nr. 56
Ediţia a XIII - a, 25.01.2014

Soluţii şi bareme clasa a VII - a

1.	Dacă $n=0$, N este pătrat perfect. Dacă $n>0$, atunci $n=2^k\cdot i$, unde $k\geq 0$ şi $i\geq 1$. Atunci $N=2^{2^k+3(k+1)}\cdot i^3$.	**1p** **1p**
	Pentru $i=1$ şi $k=0$, avem $N=2^4$ şi $n=1$	**1p**
	Pentru $i=1$ şi $k\neq 0$, rezultă k impar, deci $n\in\{2,8,32\}$.	**1p**
	Pentru $i\neq 1$, rezultă $i\in\{9,25,49,81\}$ şi $k=0$, sau k impar. Obţinem $n\in\{9,25,49,81,18,50,98,72\}$. Finalizare	**3p**
2.	Fie R mijlocul segmentului $[MN]$. Rezultă că triunghiul PRQ este isoscel cu $RP=RQ=\dfrac{AM}{2}$ şi $RQ\parallel AB$, $RP\parallel AC$.	**3p**
	Rezultă că $m\left(\widehat{PRQ}\right)=180^\circ-m\left(\widehat{BAC}\right)$, deci $m\left(\widehat{RQP}\right)+m\left(\widehat{RPQ}\right)=m\left(\widehat{BAC}\right)$	**2p**
	Deci $m\left(\widehat{RQP}\right)=\dfrac{m\left(\widehat{BAC}\right)}{2}$. Rezultă că QP este paralelă cu bisectoarea unghilui $\widehat{BAC}$. Finalizare.	**2p**
3.	Numărul se scrie $n+\dfrac{3n+1}{n^2-3}\in\mathbb{N}$. Este necesar ca $\lvert 3n+1\rvert\geq\lvert n^2-3\rvert$	**1p**
	Dacă $n>4$, atunci $n^2-3>4n-3>3n+1$, deci $n\leq 4$.	**2p**
	Dacă $n\leq -4$, atunci $\lvert 3n+1\rvert=-3n-1$ şi $\lvert n^2-3\rvert-\lvert 3n+1\rvert=n^2+3n-2\geq\lvert n\rvert(\lvert n\rvert\pm 3)-2>0$. Urmează că $n\in\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ Finalizare $n\in\{-1,2,4\}$	**4p**
4p	Considerăm $R\in BC$, astfel încât $NR\parallel AB$. Triunghiurile AMN şi PRN sunt asemenea, deci $\dfrac{AM}{PR}=\dfrac{MN}{RN}$	**2p**
	Obţinem $AM=\dfrac{PR\cdot MN}{RN}=\dfrac{PR\cdot NC}{RN}$	**3p**
	Triunghiurile RNP şi RCN sunt asemenea şi avem $\dfrac{NP}{CN}=\dfrac{RP}{RN}$. Obţinem $NP=\dfrac{PR\cdot NC}{RN}$.	**2p**