MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

ŞCOALA GIMNAZIALA nr. 56– BUCUREŞTI

Concursul Interjudeţean de Matematică al Şcolii Gimnaziale nr. 56
Ediţia a XIII - a, 25.01.2014

Clasa a VIII-a

1. Determinaţi toate tripletele de numere naturale (a,b,c) care au proprietatea

$$a^2+b^2-c^2=9-2ab.$$

2. Se consideră dreptele necoplanare e şi f. Punctele diferite A şi B sunt situate pe dreapta e, iar M este mijlocul segmentului $[AB]$. Numerele a, b şi m sunt, respectiv, distanţele de la punctele A, B şi M la dreapta f.

a) Arătaţi că $m<\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$;

b) Dacă $e\perp f$ şi $a\neq b$, arătaţi că există $N\in(AB)$ astfel încât $n=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, unde n este distanţa de la punctul N la dreapta f.

3. Determinaţi numerele iraţionale a pentru care numerele $p=\dfrac{2a^2+1}{a-3}$ şi $q=\dfrac{3a^2-1}{3a-5}$ sunt simultan numere raţionale.

4. Se consideră triunghiul ABC în care $AB\neq AC$. Punctul M este mijlocul laturii $[BC]$, iar D este intersecţia bisectoarei unghiului $\widehat{BAC}$ cu $[BC]$. Cercul circumscris triunghiului AMD intersectează (AB) şi (AC) în punctele P şi respectiv Q. Demonstraţi că $BP=CQ$.

SUCCES!

Notă:
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
- Timp de lucru efectiv : 3 ore.

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

ŞCOALA GIMNAZIALA nr. 56 – BUCUREŞTI

Concursul Interjudeţean de Matematică al Şcolii gimnaziale nr. 56
Ediţia a XIII - a, 25.01.2014

Soluţii şi bareme clasa a VIII - a

1.	Egalitatea din enunţ se scrie $(a+b-c)(a+b+c)=9$, unde $a+b+c$ şi $a+b-c$ sunt numere naturale.	**2p**
	Se analizează cazurile $a+b-c\in\{1,3\}$.	**1p**
	Se obţin 6 triplete cu $c=4$ şi 4 triplete cu $c=0$	**4p**
2.	**a)** Se consideră planul α, paralel cu dreapta *e* care conţine dreapta *f*. Atunci punctele *A*, *B* şi *M* sunt la distanţa *d* de planul α. Fie *x*, *z* şi *y* distanţele de la proiecţiile pe α ale punctelor *A*, *B* şi *M* la dreapta *f*. Obţinem $m^2=d^2+z^2=d^2+\left(\frac{x\pm y}{2}\right)^2<d^2+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, iar $\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{d^2+x^2+d^2+y^2}{2}=\frac{x^2+y^2}{2}+d^2$ Finalizare	**1p** **1p** **1p** **2p**
	b) Dreapta *e* se proiectează pe *f* intr-un punct *C*. Cum, de exemplu, $a<b$, rezultă că $a<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<b$, deci există $N\in(AB)$ astfel încât $a<CN<b$.	**2p**
3.	Avem: $2a^2-pa+3p+1=0$ şi $3a^2-3aq+5q-1=0$	**1p**
	Înmulţim prima relaţie cu 3 şi a a doua cu 2, apoi le scădem membru cu membru şi, grupând convenabil, obţinem: $3a(2q-p)+9p-10q+5=0$.	**2p**
	Cum *a* este iraţional, rezultă $p-2q=0$ şi $9p-10q+5=0$, de unde $p=-\frac{5}{4}$ şi $q=-\frac{5}{8}$.	**2p**
	Avem ecuaţia $a^2+\frac{5}{8}a-\frac{11}{8}=0$, sau $\left(a+\frac{5}{16}\right)^2=\frac{377}{256}$. Finalizare	**2p**
4.	Scriind puterea punctelor *B* şi *C* faţă de cercul (ADM), obţinem $BP\cdot BA=BD\cdot BM$, de unde $BP=\frac{BD\cdot BP}{BA}$. (1) $CQ\cdot CA=CM\cdot CD$, de unde $CQ=\frac{CM\cdot CD}{CA}$.(2)	**4p**
	Din (1) şi (2), pe baza teoremei bisectoarei rezultă concluzia.	**3p**