



Concursul de matematică "Simon Petru"
Ediția a XIV-a
Tg.-Mureș, 11.01.2014
BAREM DE EVALUARE
Clasa a V-a

Subiectul I

a) Calculați: $2 + 3 \cdot \{4 + 5 \cdot [(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5)^2 : (2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2) - 6]\}$

b) Comparați numerele

$$x = (2^0 + 8^{21} : 16^{15} + 6 \cdot 27^{10} : 81^7)^{63} \text{ și}$$

$$y = (2^{2^5} : 4^{13} - 1)^{54}$$

Soluție

a) $2 + 3 \cdot \{4 + 5 \cdot [(2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2) : (2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2) - 6]\} =$ **(1p)**

$= 2 + 3 \cdot \{4 + 5 \cdot [6 - 6]\} =$ **(1p)**

$= 14$ **(1p)**

b) $x = 63^{63}$ **(2p)**

$y = 63^{54}$. Deci, $x > y$. **(2p)**

Subiectul II

Diferența a două numere naturale este egală cu 2014. Să se afle cele două numere, știind că descăzutul este o putere a lui 5 iar scăzătorul este un număr de patru cifre identice.

Soluție

$5^n - \overline{aaaa} = 2014 \Rightarrow \overline{aaaa} = 5^n - 2014$. **(2p)**

Cum $U(5^n) = 5$ pentru $n \neq 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \overline{aaaa} = 1111$ **(3p)**

$\Rightarrow 5^n = 3125 = 5^5$. **(2p)**

Dacă $n = 0 \Rightarrow \overline{aaaa} \notin N$.

Subiectul III

Împărțind numărul natural a la numărul natural b , se obține câtul 14 și restul 18. Dacă diferența dintre numerele a și $a - 3b$ este egală cu 135, arătați că numărul $2a$ este pătrat perfect.

Gazeta matematică 10/2013

Orice altă rezolvare corectă diferită de barem se punctează cu maxim de puncte.

**Soluție**

Din Teorema împărțirii cu rest $\Rightarrow a = 14b + 18$ și $b > 18$ **(1p)**

$$a - (a - 3b) = 135 \Rightarrow a - a + 3b = 135 \Rightarrow 3b = 135 \Rightarrow b = 45 \quad \textbf{(2p)}$$

$$a = 14 \cdot 45 + 18 = 648 \quad \textbf{(2p)}$$

$$2a = 1296 \quad \textbf{(1p)}$$

$$2a = 36^2 \quad \textbf{(1p)}$$

Subiectul IV

Se consideră 6561 numere naturale nenule a căror sumă este 3^{72} . Aceste numere se așează în jurul unui cerc. Arătați că, indiferent de modul de aranjare a acestor numere, vor exista două numere alăturate a căror sumă este mai mare sau egală cu 3^{64} .

Soluție

Fără a restrânge generalitatea problemei presupunem următoarea aranjare pe cerc:

$$a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow \dots \rightarrow a_{6561} \quad \textbf{(1p)}$$

Presupunem că suma oricăror două numere alăturate din aranjarea de mai sus este mai mică decât 3^{64} **(1p)**

$$\Rightarrow a_1 + a_2 < 3^{64}$$

$$a_2 + a_3 < 3^{64}$$

.....

$$a_{6560} + a_{6561} < 3^{64}$$

$$a_{6561} + a_1 < 3^{64} \quad \textbf{(1p)}$$

Adunând inegalitățile de mai sus membru cu membru obținem:

$$2(a_1 + a_2 + \dots + a_{6560} + a_{6561}) < 6561 \cdot 3^{64} = 3^8 \cdot 3^{64} = 3^{72} \quad \textbf{(2p)}$$

$$\text{Dar, } 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{6560} + a_{6561}) = 2 \cdot 3^{72} < 3^{72} \text{ contradicție} \quad \textbf{(1p)}$$

Deci, indiferent de modul de aranjare a acestor numere, vor exista două numere alăturate a căror sumă este mai mare sau egală cu 3^{64} . **(1p)**

Orice altă rezolvare corectă diferită de barem se punctează cu maxim de puncte.



Concursul de matematică "Simon Petru"
Ediția a XIV-a
Tg.-Mureș, 11.01.2014

Clasa a VI-a

Subiectul I.

Comparați fracțiile: $a = \frac{x + 343^{671}}{x + 2401^{503}}$, $b = \frac{y + 625^{503}}{y + 216^{671}}$

Gazeta matematica 2013

Soluție

$$a = \frac{x + 343^{671}}{x + 2401^{503}} = \frac{x + (7^3)^{671}}{x + (7^4)^{503}} = \frac{x + 7^{2013}}{x + 7^{2012}} \quad (2p)$$

$$\text{Deoarece } 7^{2013} > 7^{2012} \Rightarrow x + 7^{2013} > x + 7^{2012} \Rightarrow a > 1 \quad (1p)$$

$$b = \frac{y + 625^{503}}{y + 216^{671}} = \frac{y + (5^4)^{503}}{y + (6^3)^{671}} = \frac{y + 5^{2012}}{y + 6^{2013}} \quad (2p)$$

$$\text{Deoarece } 5^{2012} < 6^{2013} \Rightarrow y + 5^{2012} < y + 6^{2013} \Rightarrow b < 1 \quad (1p)$$

$$\text{Finalizare } a > b \quad (1p)$$

Subiectul II.

Se consideră unghiuri adiacente două câte două cu suma măsurilor 180^0 . Aflați măsurile lor, exprimate prin numere naturale, știind că fiecare unghi, începând cu al doilea, are măsura dublă față de măsura precedentului.

Soluție

Notăm cu x măsura primului unghi.

$$\text{Avem: } x + 2x + 2^2x + \dots + 2^n x = 180^0$$

$$x(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n) = 180$$

$$x(2^{n+1} - 1) = 180 \quad (2p)$$

Orice altă rezolvare corectă diferită de barem se punctează cu maxim de puncte.



Cum x este natural $\Rightarrow x$ și $2^{n+1} - 1$ sunt divizori al lui 180. (1p)

Din $2^{n+1} - 1$ este impar $\Rightarrow 2^{n+1} - 1$ poate fi 1, 3, 5, 9, 15, 45. (1p)

Deci 2^{n+1} poate fi 2,4,6,10,16 sau 46. (1p)

Convine doar

caz I. $2^{n+1} = 4 \Rightarrow n=1 \Rightarrow x = 60 \Rightarrow 2x=120$ (1p)

caz II. $2^{n+1} = 16 \Rightarrow n=3 \Rightarrow x=12, 2x=24, 4x=48, 8x=96.$ (1p)

Subiectul III.

Se consideră două unghiuri adiacente $\angle AOB$ și $\angle BOC$ de măsuri 108° respectiv 68° .
Semidreptele $[OM, [ON$ și $[OP$ sunt bisectoarele unghiurilor $\angle AOB$, $\angle BOC$ respectiv $\angle MON$.
Pe semidreapta opusă lui $[OP$ considerăm un punct P' , iar în interiorul $\angle AOP'$ alegem un punct B' astfel încât $m(\angle B'OP') = 10^\circ$. Să se arate că punctele B, O, B' sunt coliniare.

Soluție:

$$m(\hat{AOM}) = m(\hat{MOB}) = \frac{108^\circ}{2} = 54^\circ \quad (1p)$$

$$m(\hat{BON}) = m(\hat{NOC}) = \frac{68^\circ}{2} = 34^\circ \quad (1p)$$

$$\Rightarrow m(\hat{MON}) = 54^\circ + 34^\circ = 88^\circ \Rightarrow m(\hat{MOP}) = \frac{88^\circ}{2} = 44^\circ \quad (1p)$$

$$\Rightarrow m(\hat{AOP}) = 54^\circ + 44^\circ = 98^\circ \Rightarrow m(\hat{AOP'}) = 180^\circ - 98^\circ = 82^\circ \quad (1p)$$

$$\Rightarrow m(\hat{AOB'}) = 82^\circ - 10^\circ = 72^\circ \quad (1p)$$

$$\text{Deci } m(\hat{BOB'}) = 108^\circ + 72^\circ = 180^\circ \quad (1p)$$

Deci punctele B, O, B' sunt coliniare (1p)

Subiectul IV.

Arătați că nu există numere naturale a și b astfel încât: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{6}{[a,b]} = \frac{1}{(a,b)}$, unde prin (a,b) am notat c.m.m.d.c. al numerelor a și b , iar prin $[a,b]$ am notat c.m.m.m.c. al numerelor a și b .
Orice altă rezolvare corectă diferită de barem se punctează cu maxim de puncte.

**Soluție:**

Fie d c.m.m.d.c al numerelor a și $b \Rightarrow$ există numerele naturale $x, y \in \mathbf{N}$ astfel încât

$$a = dx \text{ și } a = dy \text{ și } (x, y) = 1 \text{ (} x \text{ și } y \text{ prime între ele).} \quad (1p)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{6}{[a, b]} = \frac{1}{(a, b)} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} + \frac{6}{[a, b]} = \frac{1}{(a, b)} \quad (1p)$$

$$\text{Dar, } (a, b) \cdot [a, b] = ab \Rightarrow \frac{a+b}{(a, b) \cdot [a, b]} + \frac{6}{[a, b]} = \frac{1}{(a, b)} \Rightarrow a+b+6(a, b) = [a, b] \Rightarrow \quad (1p)$$

$$\Rightarrow d \cdot x + d \cdot y + 6 \cdot d = \frac{d \cdot x \cdot d \cdot y}{d} \Rightarrow x + y + 6 = xy \Rightarrow (x-1)(y-1) = 7 \quad (1p)$$

$$\Rightarrow x-1=1 \text{ și } y-1=7 \Rightarrow x=2 \text{ și } y=8 \text{ sau} \quad (1p)$$

$$x-1=7 \text{ și } y-1=1 \Rightarrow x=8 \text{ și } y=2 \quad (1p)$$

Dar x și y sunt prime între ele \Rightarrow concluzia (1p)



Concursul de matematică "Simon Petru"
Ediția a XIV-a
Tg.-Mureș, 11.01.2014

Clasa a VII-a

Subiectul 1. Rezolvați ecuațiile în mulțimea numerelor reale:

a) $\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \dots + \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$

b)
$$\frac{1+2+\dots+2013}{2013-2012+2011-2010+\dots+5-4+3-2+1} = \frac{11x-1}{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2012 \cdot 2013}}.$$

(Matlap)

Soluție:

a) Ecuația este echivalentă cu $(x-1)+(x-2)+\dots+1=3x, x \neq 0$ (1p)

$\Rightarrow \frac{(x-1)x}{2} = 3x \Rightarrow x-1=6 \Rightarrow x=7 \quad S = \{7\}.$ (2p)

b) $1+2+\dots+2013 = 2013 \cdot 1007$ (1p)

$(2013-2012)+(2011-2010)+\dots+(5-4)+(3-2)+1=1007$ (1p)

$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2012 \cdot 2013} = 1 - \frac{1}{2013} = \frac{2012}{2013}.$ (1p)

Ecuația este echivalentă cu

$\frac{2013 \cdot 1007}{1007} = \frac{(11x-1) \cdot 2013}{2012} \Leftrightarrow 2012 = 11x-1 \Leftrightarrow 11x = 2013 \Leftrightarrow x = 183, S = \{183\}$ (1p)

Subiectul II.

Fie a și b numere întregi. Să se arate că dacă 13 divide $a^2 + b^2$ atunci 13 divide $2a + 3b$ sau 13 divide $2b + 3a$.

Soluție:

$(2a+3b)(2b+3a) = 2a \cdot 2b + 6 \cdot a^2 + 6 \cdot b^2 + 9 \cdot ab = 6(a^2 + b^2) + 13ab$ (3p)

Din ipoteză $\left. \begin{array}{l} 13/a^2 + b^2 \\ 13/13ab \end{array} \right\} \Rightarrow 13/6(a^2 + b^2) + 13ab$ (2p)

$\Rightarrow 13/(2a+3b)(2b+3a) \Rightarrow 13/2a+3b \text{ sau } 13/2b+3a$ (2p)

Orice altă rezolvare corectă diferită de barem se punctează cu maxim de puncte.

**Subiectul III.**

Fie ΔABC , AD mediană. Prin punctul $M \in BC$ construim paralela la AD care intersectează AC și AB în punctele F , respectiv E .

a) Arătați că $AE \cdot AC = AF \cdot AB$

b) Dacă $FG \parallel BC$, $G \in AB$ și $AD \cap FG = \{Q\}$, demonstrați că $EF = 2AQ$.

Soluție

$$\text{a) În } \Delta BME, AD \parallel ME \xRightarrow{T.TH} \frac{AE}{AB} = \frac{DM}{BD} \quad (1p)$$

$$\text{În } \Delta CDA, FM \parallel AD \xRightarrow{T.TH} \frac{AF}{AC} = \frac{DM}{DC} \quad (1p)$$

$$[AD] \text{ mediană} \Rightarrow BD = DC \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AF \cdot AB = AE \cdot AC \quad (1p)$$

$$\text{b) În } \Delta ABC, GF \parallel BC \xRightarrow{T.TH} \frac{AG}{AB} = \frac{AF}{AC} \quad (1p)$$

$$\Rightarrow AG = \frac{AB \cdot AF}{AC} = \frac{AB \cdot AE}{AB} = AE \quad (1p)$$

În triunghiul GFE , $AG = AE$, $AQ \parallel EF \Rightarrow$ din reciproca T. liniei mijlocii $[AQ]$ linie mijlocie (1p)

$$\text{Deci, } EF = 2AQ. \quad (1p)$$

Subiectul IV

Se consideră pătratul $ABCD$ și punctele $E \in (AB)$, respectiv $F \in (BC)$ astfel încât $AB = 2AE$ și $BC = 4BF$. Să se demonstreze că:

a) $DE \perp EF$;

b) $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle FDE$.

Soluție.

a) Fie M mijlocul laturii (BC) rezultă că (EF) este linie mijlocie în triunghiul ABM , deci $EF \parallel AM$. (1p)

Din congruența triunghiurilor dreptunghice ABM , respectiv DAE (C.C) rezultă

$$m(\sphericalangle MAB) = m(\sphericalangle EDA) = 90^\circ - m(\sphericalangle AED), \text{ de unde rezultă } DE \perp AM. \quad (1p)$$

Deci $DE \perp EF$. (1p)

b). Fie $\{G\} = AD \cap EF$. (1p)

Din congruența triunghiurilor dreptunghice BEF , respectiv AEG rezulta că $EF \equiv EG$, (1p)

Așadar (DE) este mediana, respectiv înălțime în triunghiul DGF , (1p)

deci triunghiul DGF este isoscel, adică (DE) este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADF$ (1p)

**Concursul de matematică "Simon Petru"****Ediția a XIV-a****Tg.-Mureș, 11.01.2014****Clasa a VIII-a****Subiectul I**a) Descompuneți în factori expresia: $x^4 + x^2 + 1$, $x \in \mathbf{R}$.b) Verificați dacă numărul $a = 2401^{2013} + 49^{2013} + 1$ este număr prim.

Prof. Danciu Alin Florin

Soluție:

$$a) \quad x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 \quad (1p)$$

$$= (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x) \quad (2p)$$

$$b) \quad 2401 = 7^4; \quad 49 = 7^2 \quad (1p)$$

$$a = 2401^{2013} + 49^{2013} + 1 = (7^4)^{2013} + (7^2)^{2013} + 1 = (7^{2013})^4 + (7^{2013})^2 + 1 \quad (1p)$$

$$- \text{înlocuind în } a) \quad x = 7^{2013} \text{ obținem } a = (7^{4026} - 7^{2013} + 1) \cdot (7^{4026} + 7^{2013} + 1), \quad (1p)$$

Deci, a nu este număr prim (1p)**Subiectul II**Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $b > 0$, astfel încât $a + b = 2$.Demonstrați că: $8 < \left(a - \frac{4}{a}\right)\left(b - \frac{4}{b}\right) \leq 9$ **Soluție**

$$\left(a - \frac{4}{a}\right)\left(b - \frac{4}{b}\right) = \frac{(a^2 - 4)(b^2 - 4)}{ab} = \frac{(2-a)(2+a)(2-b)(2+b)}{ab} = \quad (1p)$$

$$= \frac{(2+a)(2+b)ab}{ab} = 4 + 2(a+b) + ab = 8 + ab > 8 \quad (1) \quad (2p)$$

$$m_g \leq m_a \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Rightarrow ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (2p)$$

$$\Rightarrow 8 + ab \leq 8 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 8 + 1 = 9 \quad (2) \quad (1p)$$

Orice altă rezolvare corectă diferită de barem se punctează cu maxim de puncte.

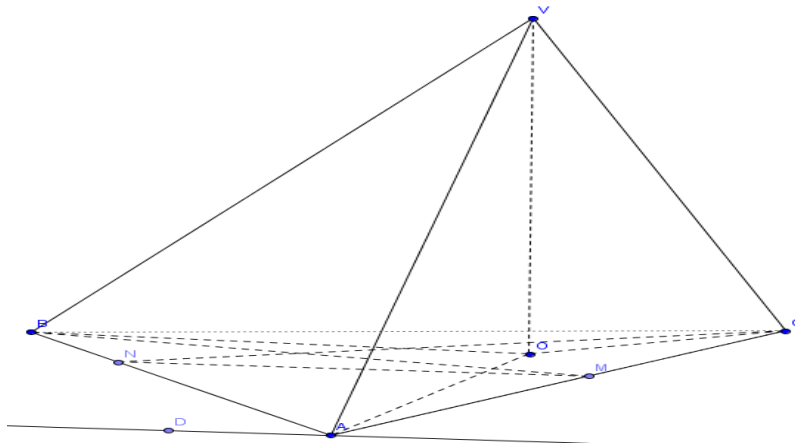


$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow 8 < \left(a - \frac{4}{a}\right) \left(b - \frac{4}{b}\right) \leq 9 \quad (1p)$$

Subiectul III.

În tetraedrul VABC, cu triunghiul ABC ascuțitunghic, muchiile (VA), (VB) și (VC) sunt congruente. Dacă M și N sunt picioarele perpendicularelor din B și C pe (AC), respectiv (AB), demonstrați că $VA \perp MN$.

Soluție



Fie $VO \perp (ABC)$. Cum V este egal depărtat de vârfurile triunghiului ABC, rezultă că O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. (1p)

Fie AD tangentă la cercul circumscris triunghiului ABC. Rezultă că $m(\angle DAO) = 90^\circ$ (C și D în semiplane opuse față de dreapta AB). (1p)

Cum unghiurile CNB și BMC sunt drepte, rezultă că patrulaterul CBNM este inscriptibil. (1p)

Notând măsura unghiului BCA cu x , rezultă că $m(\angle BNM) = 180^\circ - x \Leftrightarrow m(\angle ANM) = x$ (1).

Mai mult, AOB este unghi la centru, deci $m(\angle BOA) = 2x$, iar cum triunghiul AOB este isoscel în O, rezultă că $m(\angle BAO) = 90^\circ - x$. (1p)

Cum $m(\angle DAO) = 90^\circ$, rezultă că $m(\angle DAB) = x$, de unde, împreună cu (1), conduce la $AD \parallel NM$ (*). (1p)

$$\left. \begin{array}{l} VO \perp (ABC) \\ \text{Acum, } AO \perp DA \\ AO, DA \subset (ABC) \end{array} \right\} \begin{array}{l} T_{3 \perp} \\ (*) \end{array} \Rightarrow VA \perp AD \Leftrightarrow VA \perp MN. \quad (1p)$$

Subiectul IV

Fie cubul $ABCD A'B'C'D'$, $AB = a$, O centrul feței $AA'B'B$ și M un punct oarecare pe $[D'C]$.:

a. Aflați distanța de la punctul A la planul (MOB).

b. Arătați că $d \in \left[\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right]$, unde d = distanța de la punctul B la planul (MOA)

Orice altă rezolvare corectă diferită de barem se punctează cu maxim de puncte.

**Soluție**

a) $(MOB) = (CA'B)$, AO perpendicular pe planul $(CA'B)$, deci pe (MOB) . (2p)

$$AO = d[A, (MOB)] = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad (1p)$$

b) Fie $BP \perp MO$, $P \in MO$. (1)

$$AO \perp (MOB) \Rightarrow AO \perp BP \quad (2) \quad (1p)$$

Din (1) și (2) \Rightarrow distanța de la punctul B la planul (MOA) este de fapt distanța de la punctul B la $MO = BP = d$

$$\text{Cum } A_{MOB} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4} \Rightarrow BP \cdot MO = \frac{a^2\sqrt{2}}{2} \quad (3) \quad (1p)$$

$$\text{Cum } O \text{ fixat} \cdot OM = \text{minim} \Rightarrow OM = d(O, D'C) = a, \text{ iar } OM = \text{maxim} \Rightarrow OM = \frac{a\sqrt{6}}{2} \quad (4) \quad (1p)$$

$$\text{Din (3) și (4)} \Rightarrow d \in \left[\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{a\sqrt{2}}{2} \right] \quad (1p)$$