

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.

Subiectul I (30 puncte)

- 5p 1. Să se arate că $\log_3 8 \cdot \log_2 9 \in \mathbb{N}$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. Calculați $(f \circ f)(-1)$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-1} = x - 2$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulțimea $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{50}\}$, acesta să fie pătrat perfect.
- 5p 5. Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(1, -2)$ și $B(-3, 0)$. Determinați coordonatele simetricului punctului A față de B .
- 5p 6. Să se calculeze $\sin 2x$, știind că $\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Subiectul II (30 puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.
- 7p a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A - xI_2) = -20$.
- 8p b) Să se determine numărul real m astfel încât $A^2 + mI_2 = 9A$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție "o" prin $x \circ y = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$.
- 7p a) Calculați $(-3) \circ 6$.
- 8p b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = \sqrt{12}$.

Subiectul III (30 puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{e^x}$.
- 7p a) Să se arate că $f'(x) = -\frac{x+1}{e^x}$.
- 8p b) Să se arate că $f(x) \leq e$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x+1}, & x > 0 \\ 2+x \cdot e^x, & x \leq 0 \end{cases}$.
- 5p a) Să se arate că f admite primitive pe \mathbb{R} .
- 10p b) Determinați primitiva funcției f pentru $x < -1$, al cărei grafic conține punctul $A(-2, -1)$.

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

Subiectul I (30 puncte)

1. $\log_3 8 = \log_3 2^3 = 3\log_3 2$, $\log_2 9 = \log_2 3^2 = 2\log_2 3$
finalizare 3p
2p

2. $(f \circ f)(x) = x + 2$ 3p
 $(f \circ f)(-1) = 1$ 2p

3. Condiții $2x - 1 \geq 0$ și $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \in [2, +\infty)$ 1p
 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 2p
 $x_1 = 1 \notin [2, +\infty), x_2 = 5$ 2p

4. $\sqrt{1}, \sqrt{16}$ - pătrate perfecte 3p
 $P = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{50}$ 2p

5. $M(x_M, y_M)$ cu B mijlocul segmentului $[AM]$ 1p
 $x_B = \frac{x_A + x_M}{2} \Rightarrow x_M = -7$ 2p
 $y_B = \frac{y_A + y_M}{2} \Rightarrow y_M = 2$ 2p

6. $\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \cos x = -\sqrt{1 - \frac{1}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ 3p
 $\sin 2x = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{4}{5}$ 2p

Subiectul II (30 puncte)

1.a) $A - xI_2 = \begin{pmatrix} 2-x & 4 \\ 5 & 7-x \end{pmatrix} \Rightarrow (2-x)(7-x) - 20 = -20$ 4p
 $x \in \{2, 7\}$ 3p

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 24 & 36 \\ 45 & 69 \end{pmatrix}$ 4p

$$A^2 - 9A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I_2 \Rightarrow m = -6$$

4p

2.a) calcul direct

7p

$$b) x \circ x = \sqrt{12} \Rightarrow \sqrt{2x^2 + 4} = \sqrt{12}$$

4p

$$x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$$

4p

Subiectul III (30 puncte)

2p

1.a) formula

5p

calcul direct

b) rezolvarea ecuației $f'(x) = 0$

2p

tabel și semn

4p

2p

Finalizare

2.a) studierea continuității în $x = 0$

3p

studierea continuității pe intervale și finalizare

2p

$$b) F(x) = 2x + xe^x - e^x + c$$

5p

$$F(-2) = -1$$

3p

finalizare

2p