TEZA LA MATEMATICA PE SEMESTRUL I
CLASA a XII-a, *M1_matematică-informatică*
12.12.2013

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Matematică-informatică.
• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Pe mulţimea $M=[2,\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\sqrt{x^2+y^2-4}$, $\forall x,y\in M$
Rezolvaţi în M ecuaţia : $x*1=x-2$.

(5p) 2. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_4$ ecuaţia $\hat{2}x^2+\hat{3}x=\hat{1}$.

(5p) 3. Care este probabilitatea, ca alegând la întâmplare un element oarecare din mulţimea $\mathbb{Z}_{10}$, acesta să fie inversabil ?

(5p) 4. Calculaţi $\int \frac{dx}{x(8+ln^2x)}$.

(5p) 5. Calculaţi $\int \frac{4x-6}{x^2-3x+7}dx$

(5p) 6. Fie funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(x)=3x-5$ şi $F(x)=ax^2+bx+c,\ a,b,c\in\mathbb{R}$. Să se determine a,b şi c astfel încât funcţia F să fie o primitive a funcţiei f.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Pe mulţimea $\mathbb{C}$ se consideră legea de compoziţie :$x\circ y=xy+i(x+y)-(1+i),\forall x,y\in\mathbb{C}$.

(5p) a) Să se arate că $x\circ y=(x+i)(y+i)-i,\forall x,y\in\mathbb{C}$.

(5p) b) Să se arate că legea este asociativă.

(5p) c) Să se calculeze : $(-2013i)\circ(-2012i)\circ\ldots\circ(-2i)\circ(-i)$.

2. Pe mulţimea $M=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\\ x & 0 & 1-x\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}$ se consideră operaţia de înmulţire a matricelor.

(5p) a) Să se demonstreze că mulţimea M este parte stabilă în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

(5p) b) Să se determine elementul neutru al legii .

(5p) c) Să se calculeze simetricul lui A(5) în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\le 1\\ \sqrt{x+3}, x>1\end{cases}$.

(5p) a) Să se arate că funcţia f admite primite pe $\mathbb{R}$,

(5p) b) Calculaţi primitivă funcţiei f care se anulează în origine

(5p) c) Să se arate că orice primitivă F a funcţiei f este crescatoare pe $\mathbb{R}$.

2. Fie funcţia $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=e^x sin^n x$

(5p) a) Calculaţi $\int f_1(x)dx$.

(5p) b) Calculaţi $\int f_2(x)dx$.

(5p) c) Să se stabilească o relaţie de recurenţă pentru calculul integralei funcţiei f_n.

TEZA LA MATEMATICA PE SEMESTRUL I
CLASA a XII-a, *M1_matematică-informatică*
12.12.2013
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Matematică-informatică.
- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I

1.	$x*1=x-2 => \sqrt{x^2-3}=x-2.$	1p
	$\left(\sqrt{x^2-3}\right)^2=(x-2)^2$	1p
	$x=\frac{7}{4}\notin [\![2;\infty)$	2p
	$S=\emptyset$	1p
2.	Se dau valori lui x (pentru fiecare vaolare 1p)	4p
	Finalizare $x=\hat{1}$	1p
3.	$P=\frac{\textbf{număr cazuri favorabile}}{\textbf{număr cazuri posibile}}=\frac{\lvert U(\mathbb{Z}_{10})\rvert}{\lvert\mathbb{Z}_{10}\rvert}$	1p
	$U(\mathbb{Z}_{10})=\{\hat{1},\hat{3},\quad \hat{7},\hat{9}\} => \lvert U(\mathbb{Z}_{10})\rvert=4$	2p
	$\lvert\mathbb{Z}_{10}\rvert=10$	1p
	Finalizare : $P=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$	1p
4.	$lnx=t$	1p
	$\frac{1}{x}dx=dt$	1p
	$\int\frac{dx}{x(8+ln^2x)}=\int\frac{dt}{t^2+8}$	1p
	Finalizare: $\int\frac{dx}{x(8+ln^2x)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{lnx}{2\sqrt{2}}+C$	2p
5.	$x^2-3x+7=t$	1p
	$(2x-3)dx=dt$	1p
	Finalizare	3p
6.	$\int f(x)dx=\frac{3}{2}x^2-5x+c$ sau $F'(x)=2ax+b$	2p
	$a=\frac{3}{2}$, $b=-5$	2p
	$c\in\mathbb{R}$	1p

SUBIECTUL al II-lea

1.	a)	$(x+i)(y+i)-i=xy+ix+iy-1+i=$	2p
		$=xy+i(x+y)-(1+i)=$	2p
		$=x\circ y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ **Finalizare**	1p

	b)	$(x\circ y)\circ z=(x+i)(y+i)(z+i)-i$ $x\circ(y\circ z)=(x+i)(y+i)(z+i)-i$ **Finalizare**: legea „$\circ$” este asociativă.	2p 2p 1p
	c)	$x\circ(-i)=-i, \forall x\in\mathbb{R}$ $(-2013i)\circ(-2012i)\circ\ldots\circ(-2i)\circ(-i)=$ $\overset{\text{"}\circ\text{"}asoc}{\underset{conf\, b)}{=}}\left[(-2013i)\circ(-2012i)\circ\ldots\circ(-2i)\right]\circ(-i)=x\circ(-i)=-i$ Unde $\left[(-2013i)\circ(-2012i)\circ\ldots\circ(-2i)\right]\overset{not}{=}x$	2p 3p
2.	a)	$A(x)\cdot A(y)=A(x+y-2xy), \forall A(x),A(y)\in M$ $\forall x,y\in\mathbb{R} \Rightarrow (x+y-2xy)\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow A(x)\cdot A(y)=A(x+y-2xy)\in M, \forall A(x),A(y)\in M$	3p 1p 1p
	b)	$\exists A(e)\in M, a.i. A(x)\circ A(e)=A(e)\circ A(x)=A(x), \forall A(x)\in M$ $A(x)\circ A(e)=A(e)\circ A(x)=A(x+e-2xe), \forall A(x)\in M$ $A(x)=A(y)\Leftrightarrow x=y$ $A(x)\circ A(e)=A(x) \Rightarrow x+e-2xe=x, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow e=0\in\mathbb{R}$ **Finalizare:** $A(e)=A(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\in M$	1p 1p 1p 1p 1p
	c)	$A(5)\cdot A(x)=A(0) \Rightarrow A(5-9x)=A(0)$ Finalizare: $A\left(\frac{5}{9}\right)$ este simetricul lui A(5)	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

1.	a)	Studiul continuitatii in $x=1$ f *continua in* $x=1 \Rightarrow f$ continua pe $\boldsymbol{R}$, deci f admite primitive	3p 2p
	b)	$F(x)\begin{cases}\frac{x^3}{3}+x+c_1, & x<1\\ \frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3}+c_2, & x>1\end{cases}$. F primitivă a lui f *dacă* $c_1=4+c_2$ ($c_2=c$ *și* $c_1=4+c$) F(0) = 0 dacă c = - 4 Finalizare $F(x)\begin{cases}\frac{x^3}{3}+x, & x<1\\ \frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3}-4, & x>1\end{cases}$	2p 1p 1p 1p
	c)	$F'(x)=f(x)$ $f(x)=x^2+1>0, (\forall)x\leq 1$ $f(x)=\sqrt{x+3}>0, (\forall)x>1$ Finalizare $F'(x)>0$, $(\forall)x\in IR$, deci F crescatoare pe IR	1p 1p 1p 2p
2.	a)	*Formula de integrare prin părți* Finalizare	1p 4p