TEZA LA MATEMATICA PE SEMESTRUL I
CLASA a XII-a, *M2_şt-nat*
12.12.2013

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Ştiinţe ale naturii.
• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\hat{3}\cdot\hat{5}\cdot\hat{6}$ în Z_9

(5p) 2. Rezolvati in Z_7 ecuatia $\hat{3}x+\hat{4}=\hat{2}$.

(5p) 3. Să se studieze asociativitatea pe $\mathbb{R}$ a următoarei legi de compoziţie

$$x * y = x + 2y + 1$$

(5p) 4. . Fie funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=4x+5$ şi $F(x)=ax^2+bx+c,\ a,b,c\in\mathbb{R}$. Să se determine a,b şi c astfel încât funcţia F să fie o primitive a funcţiei f şi F(2) = 5.

(5p) 5. Calculaţi $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$.

(5p) 6. Calculaţi $\int 2^{2x}e^x dx$

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Pe $\mathbb{Z}$ se consideră legea de compoziţie $x * y = xy - 2x - 2y + 6$.

(5p) a) Aratati ca $x * y = (x-2)(y-2)+2$.

(5p) b) Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie

(5p) c) Demonstrati că $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{\text{n ori}} = (x-2)^n + 2, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

2. În $M_2(\mathbb{R}^*)$ se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}2-x & x-1\\ 2(1-x) & 2x-1\end{pmatrix}$, unde $x\in.\mathbb{R}^*$

(5p) a) Să se calculeze $A(1)+A(2)\cdot A(3)$.

(5p) b) Să se arate că $A(x)\cdot A(y)=A(x\cdot y)$, $(\forall)x,y\in.\mathbb{R}^*$.

(5p) c) Să se arate că $\left(A(x)\right)^{-1}=A\left(\frac{1}{x}\right)$, $(\forall)x\in.\mathbb{R}^*$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se considera functia $f:R\to R, f(x)=\begin{cases} ax-1, x<1\\ lnx+x,\ \ x\geq 1\end{cases}$.

(5p) a) Calculati $\int(lnx+x)dx$;

(5p) b) Determinati $a\in R$ pentru care functia f admite primitive pe $\mathbb{R}$

(5p) c) Pentru $x\geq 1$, calculati $\int\frac{x+1}{xf(x)}dx$.

2. Fie $I_n=\int x^n e^x dx$, $x\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Calculati I_1

(5p) b) Calculati I_3

(5p) c) Să se demonstreze că $I_n - I_{n-1} = x^n e^x, \forall x\in\mathbb{R}$ şi $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

TEZA LA MATEMATICA PE SEMESTRUL I
CLASA a XII-a, *M2_şt-nat*
12.12.2013
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Ştiinţe ale naturii.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I

1.	Calcul direct S $=\hat{0}$	**5p**
2.	$\hat{3}x = \hat{5}$ $x = \hat{4}$	**2p** **3p**
3.	$(x * y) * z = x * (y * z)$ $(x * y) * z = x + 2y + 2z + 2$ $x * (y * z) = x + 2y + 4z + 3$ Legea nu este asociativă	**1p** **2p** **1p** **1p**
4.	$\int f(x)dx = x^2 - 6x + c$ sau $F'(x) = 2ax + b$ a = 2, b = 5 F(2) = 5, c = - 13	**2p** **2p** **1p**
5.	$x^2 + 4 = t$ $2xdx = dt$ $I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} = \sqrt{x^2+4} + C$	**1p** **1p** **3p**
6.	$\int 2^{2x} e^x dx = \int (4e)^x$ Fonalizare	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea

1.	**a)**	$(x-2)(y-2) + 2 = xy - 2x - 2y + 6$ Finalizare	**3p** **2p**
	b)	Exista e $\in \mathbb{Z}$ astfel incat $x * e = e * x = x, \forall$ x $\in \mathbb{Z}$ $e = 3$	**1p** **4p**
	c)	$n = 2 \Rightarrow (x * x) = (x-2)^2 + 2,$ Demonstraţie prin inducţie matematică	**1p** **4p**
2.	**a)**	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ $A(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $A(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ $A(2) \cdot A(3) = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -14 & 11 \end{pmatrix}$ $A(1) + A(2) \cdot A(3) = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -14 & 12 \end{pmatrix}$	**1p** **1p** **1p** **1p** **1p**

	b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}2-x & x-1\\ 2(1-x) & 2x-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2-y & y-1\\ 2(1-y) & 2y-1\end{pmatrix}=$	1p
		$=\begin{pmatrix}4-\cancel{2x}-\cancel{2y}+xy+\cancel{2x}+\cancel{2y}-2xy-2 & \cancel{2y}-2-xy+\cancel{x}+2xy-\cancel{x}-\cancel{2y}+1\\ 2(2-\cancel{y}-\cancel{2x}+xy+\cancel{2x}-1-2xy+\cancel{y}) & \cancel{2y}-2-2xy+\cancel{2x}+4xy-\cancel{2x}-\cancel{2y}+1\end{pmatrix}$	2p
		$=\begin{pmatrix}2-xy & xy-1\\ 2(1-xy) & 2xy-1\end{pmatrix}=A(xy).$	1p
		Finalizare: $A(x)\cdot A(y)=A(x\cdot y),\ (\forall)x,y\in\mathbb{R}^*.$	1p
	c)	$A(x)\cdot A\left(\frac{1}{x}\right)=A\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=A(1)=I_2,\ (\forall)x\in\square^*$	2p
		$A\left(\frac{1}{x}\right)\cdot A(x)=A\left(\frac{1}{x}\cdot x\right)=A(1)=I_2,\ (\forall)x\in\square^*$	2p
		Finalizare: $A(x)\cdot A\left(\frac{1}{x}\right)=A\left(\frac{1}{x}\right)\cdot A(x)=I_2\Rightarrow\left(A(x)\right)^{-1}=A\left(\frac{1}{x}\right),\ (\forall)x\in\mathbb{R}^*.$	1p

SUBIECTUL al III-lea

1.	a)	$$\int(lnx+x)dx=\int lnxdx+\int xdx$$	1p
		$$\int lnxdx=xlnx-x+C$$	2p
		$$\int xdx=\frac{x^2}{2}+C$$	1p
		Finalizare.	1p
	b)	Studiul continuitatii in $x=1$	3p
		$a-1=1\Rightarrow a=2\Rightarrow f\ continua\ in\ x=1\Rightarrow f$ continua pe $\boldsymbol{R}$, deci f admite primitive .	2p
	c)	$\int\frac{x+1}{xf(x)}dx=\int\frac{x+1}{x(lnx+x)}dx=\int\frac{(lnx+x)'}{(lnx+x)}dx=\ln(lnx+x)+C$	1p
		$lnx+x=t$	1p
		$$\frac{x+1}{x}dx=dt$$	1p
		Finalizare: $\int\frac{x+1}{xf(x)}dx=\ln(lnx+x)+C$	2p
2.	a)	*Formula de integtare prin părți*	1p
		Finalizare	4p
	b)	*Formula de integtare prin părți*	1p
		Finalizare	4p
	c)	*Formula de integtare prin părți*	1p
		Finalizare	4p