Concursul de matematică *”Valea Sălăuței”*

Liceul Tehnologic Telciu, 16 noiembrie 2013

Clasa a VI-a

Subiectul I

a) Determinați numerele prime a, b astfel încât $2a + b = 204$.

b) Aflați numărul natural n și numărul prim p știind că $n^2 - n - p = 378$.

(7 puncte)

Subiectul II

Fie numărul natural $N = 8 + 8^2 + 8^3 + \cdots + 8^{2013}$.

a) Arătați că N este divizibil cu 584.

b) Aflați numărul natural x care verifică relația $x^3 = 7N + 8$.

(7 puncte)

Subiectul III

Fie punctele $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ situate în această ordine pe o dreaptă d astfel încât $A_0A_1 = 1$ cm, $A_1A_2 = 2$ cm, $A_2A_3 = 2^2$ cm, …, $A_{n-1}A_n = 2^{n-1}$ cm.

a) Determinați numărul natural p astfel încât $A_0A_p = 2047$ cm.

b) Dacă M este mijlocul segmentului A_2A_{12} și N este mijlocul segmentului A_4A_{10} determinați măsura segmentului MN.

(7 puncte)

BAREM

Subiectul I

a) $2a$ şi 204 numere pare $\rightarrow$ b par …………………..1p

Cum b e număr prim $\rightarrow$ $b = 2$ ……………………1p

$a = 101$ ……………………..…………….…………………1p

b) $n^2 - n - p = n(n-1) - p$ …………………………….……………..1p

$n(n-1)$ produs a două numere consecutive, deci par ………….….1p

cum 378 este număr par implică p număr prim par, $p = 2$ …………1p

$n = 20$ ………………………………………………………………1p

Subiectul II

a) $8 + 8^2 + 8^3 = 584$ ……………………………………………………….……………1p

$N = 8 + 8^2 + 8^3 + 8^3(8 + 8^2 + 8^3) + \cdots + 8^{2010}(8 + 8^2 + 8^3)$ ………1p

$N = 584(1 + 8^3 + 8^6 + \cdots + 8^{2010})$ divizibil cu 584 …………………….……1p

b) $N = (8^{2014} - 8) : 7$ …………………………1p

$7N + 8 = 8^{2014}$ ……………………..…..……1p

$x^3 = 2^{3 \cdot 2014}$ ………………………………1p

$x = 2^{2014}$ ……………………………………..1p

Subiectul III

a) $A_0A_p = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{p-1}$ ………………………………………………….. 1p

$A_0A_p = 2^p - 1$ ……………………………………………………………….. 1p

$2^p - 1 = 2047$ implică $p = 12$ ……………………………………………………..1p

b) $A_2A_{12} = 2^2 + 2^3 ... + 2^{11} = 2^{12} - 2^2 = 4092\ cm$ …………………….……….. 0,5p

$A_2M = 4092 : 2 = 2046\ cm$ ……………………………..………………….. 0,5p

$A_4A_{10} = 2^4 + 2^5 ... + 2^9 = 2^{10} - 2^4 = 1008\ cm$ ……………………………..0,5p

$A_4N = 1008 : 2 = 504\ cm$ ……………………………..…………………….. 0,5p

$A_4M = A_2M - A_2A_4 = 2046 - 12 = 2034\ cm$ ………………………….. 1p

$MN = A_4M - A_4N = 1530cm$ ………………………………………………………. 1p