Concursul de matematică *”Valea Sălăuței”*
Liceul Tehnologic Telciu, 16 noiembrie 2013
Clasa a V-a

1. a) Demonstraţi că $2^{300} < 3^{200}$.
b) Scrieţi pe 29^{2013} ca sumă de trei pătrate perfecte nenule.

2. Fie $a = 2013 + 2(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 2012)$ şi $b = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2013$.
a) Arătaţi că a şi b sunt pătrate perfecte.
b) Arătaţi că $2013 + a < 4b$.

3. Se dă şirul 9; 13; 17; 21; 25; …
a) Care este al 10-lea termen al şirului?
b) Aflaţi termenul care ocupă locul 2013 în şir.
c) Verificaţi dacă numerele 1000 şi 2013 aparţin şirului.
d) Calculaţi suma primilor 100 de termeni ai şirului.

BAREM

1.a) $2^{300} = 2^{3\cdot100} = (2^3)^{100} = 8^{100}$………………………………………………....1p

$3^{200} = 3^{2\cdot100} = (3^2)^{100} = 9^{100}$………………………………………………....1p

Deoarece $8^{100} < 9^{100} \Rightarrow 2^{300} < 3^{200}$……………………………………….....1p

b) Se scrie 29 ca sumă de trei pătrate perfecte: $29 = 2^2+3^2+4^2$………………..1p

$29^{2013}=29\cdot29^{2012}=$……………………………………………………….....1p

$=(2^2+3^2+4^2)\cdot29^{2012}=2^2\cdot29^{2012}+3^2\cdot29^{2012}+4^2\cdot29^{2012}=$……………………….....1p

$=(2\cdot29^{1006})^2+(3\cdot29^{1006})^2+(4\cdot29^{1006})^2$……………………………………..1p

2. a) $a= 2013 + 2(1+2+3+4+\ldots+2012) =2013 + 2\cdot2012\cdot2013 : 2=$………… .. 1p

$= 2013 + 2012\cdot2013 = 2013(1 + 2012) = 2013\cdot2013 = 2013^2$…………. 1p

$b = 1+3+5+7+\ldots+2013=1+2+3+4+\ldots+2013-(2+4+\ldots+2012)=$

$=2013\cdot2014:2 - 2(1+2+3+4+\ldots+1006)=$ ………. ……………………….1p

$=2013\cdot1007-2\cdot1006\cdot1007 : 2=2013\cdot1007-1006\cdot1007=$

$=1007(2013-1006)= 1007\cdot1007=1007^2$…………………………………..1p

b) $2013 + a = 2013 + 2013^2=2013(1 + 2013)= 2013\cdot2014$…………………...1p

$4b=4\cdot1007^2=2^2\cdot1007^2=(2\cdot1007)^2=2014^2$…………………………………...1p

Deoarece $2013\cdot2014<2014^2 \Rightarrow 2013 + a < 4b$…………………………….....1p

3. a) 9; 13; 17; 21; 25;29;33;37;41;45. al 10-lea termen este 45……………....1p

b) $a_1=9$;

$a_2=9+4\cdot1$

$a_3=9+4\cdot2$

$a_4=9+4\cdot3$

………..

$a_{2013}=9+4\cdot2012=9+8048=8057$…………………………………………….2p

c) Din $9+4\cdot x=1000 \Leftrightarrow 4x=991$ imp. în **N**, deci 1000 nu aparţine şirului…......1p

Din $9+4\cdot y=2013 \Leftrightarrow 4x=2004 \Leftrightarrow x=501$, deci 2013 aparţine şirului……......1p

d) $S= a_1+ a_2+ a_3+\ldots+ a_{100}=9+9+4\cdot1+9+4\cdot2+9+4\cdot3+\ldots+9+4\cdot99=$……………1p

$=9\cdot100+4(1+2+3+4+\ldots+99)=900+4\cdot99\cdot100:2=20700$…………………..1p