Concursul Naţional de Matematică "Arhimede"
Ediţia a XI-a, Etapa I, 23 noiembrie 2013

Clasa a V-a

I. **1.** Efectuaţi:

(3p) **a)** $10\cdot(9\cdot8+8\cdot7)+9\cdot(8\cdot7+6\cdot5)-8\cdot(4\cdot2-3\cdot1)$

(3p) **b)** $3^7+3^3+3^2-2^7-1^3-7^2+1^7-2^3-5^2$

(3p) **2.** Să se afle ultima cifră a numărului $7+7^2+7^3+\ldots+7^{2013}$.

II. *(3p)* **a)** Câte numere naturale cuprinse între 213 şi 2013 sunt impare ?

(3p) **b)** Câte numere naturale cuprinse între 213 şi 2013 dau restul 7 la împărţirea cu 13 ?

(3p) **c)** Câte numere naturale cuprinse între 213 şi 2013 au produsul cifrelor egal cu o putere a lui 2 ?

III. Fie şirul 3, 5, 9, 17, 33, 65, ...

(3p) **a)** Scrieţi următorii trei termeni ai şirului;

(3p) **b)** Să se stabilească dacă 2049 este termen al şirului;

(3p) **c)** Să se afle suma primilor unsprezece termeni ai şirului.

Prof. Niculae Marin Goşoniu

IV. Un profesor scrie pe tablă 8 cifre nenule distincte şi dă sarcină elevilor săi ca fiecare să scrie pe caietul său 4 numere pare, de câte 2 cifre, folosind toate cele 8 cifre, iar cele patru numere să fie scrise în ordine crescătoare. Profesorul constată că nu există doi elevi care au scris aceleaşi patru numere. Dacă profesorul ar da aceeaşi sarcină şi lui Valentin, care a întârziat, orice numere ar alege, el ar scrie aceleaşi numere ca un alt coleg. De aceea profesorul îi dă sarcina să scrie 4 numere impare de câte 2 cifre folosind toate cele 8 cifre de pe tablă.

Profesorul constată că suma celor 4 numere scrise de Valentin este egală cu suma celor 4 numere scrise de alt coleg. Să se afle:

(3p) **a)** Ce cifre a scris profesorul pe tablă;

(3p) **b)** Suma celor 4 numere scrise de Valentin;

(3p) **c)** Câţi elevi sunt în clasă după venirea lui Valentin.

Prof. Traian Preda

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.
Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă şi completă, indiferent de metodă.
Timp de lucru: **2 ore 30 min.**

Concursul Naţional de Matematică "Arhimede"
Ediţia a XI-a, Etapa I, 23 noiembrie 2013

Clasa a VI-a

I. Fie $a = 4^3 \cdot 27^2 + 8^2 \cdot 9^3$ şi $b = 81^2 \cdot 16^2 + 4^4 \cdot 3^8$

Să se arate că:

(5p) **a)** $a \mid b$

(4p) **b)** $37 \mid (a+b)$

II. Fie *A, B, C, D, E* 5 puncte coliniare în această ordine astfel încât *D* este mijlocul segmentului *(AE)* şi $(AB) \equiv (BC) \equiv (CD)$

(3p) **a)** Demonstraţi că: $\frac{1}{AE} + \frac{1}{AD} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AB}$

Considerăm punctele $M \in (BC)$, $N \in (CD)$, $P \in (DE)$ şi numărul raţional x astfel încât $AM + AN + AP = x \cdot AE$.

(3p) **b)** Pentru *M, N, P* mijloacele segmentelor *(BC), (CD),* respectiv *(DE)* să se determine valoarea lui x.

(3p) **c)** Să se demonstreze că $x \in Q \setminus N$ pentru orice poziţii ale punctelor *M, N, P* pe segmentele *(BC), (CD)* respectiv *(DE).*

Prof. Traian Preda

III. *(9p)* Fie a şi b numere naturale distincte. Să se demonstreze că dacă $\frac{6a-1}{b}$ şi $\frac{6b-1}{a}$ sunt numere naturale prime atunci a şi b sunt numere prime.

Prof. Traian Preda

IV. *(9p)* O semidreaptă dată $[OA_0$ se roteşte în acelaşi sens, în jurul originii, descriind unghiuri astfel încât $m(\angle A_0OA_1) = 1^\circ$, $m(\angle A_1OA_2) = 3^\circ, \ldots, m(\angle A_{n-1}OA_n) = 2n^\circ - 1^\circ$, $n \in N$.

Aflaţi n minim astfel încât $[OA_n$ să coincidă cu:

1) $[OA_0$; 2) $[OA_6$.

Prof. Leon Genoiu – Rm. Vâlcea

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.
Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă şi completă, indiferent de metodă.
Timp de lucru: **2 ore 30 min.**

Concursul Naţional de Matematică "Arhimede"
Ediţia a XI-a, Etapa I, 23 noiembrie 2013

Clasa a VII-a

I. **1.** Efectuaţi:

(3p) **a)** $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)$

(3p) **b)** $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$

(1p) **2.** Demonstraţi că:

$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n^2}$ pentru orice $n \in N^*$.

(2p) **3.** Calculaţi:

$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)$

II. *(5p)* **a)** Să se demonstreze că oricare ar fi a şi b numere naturale nenule, numărul $a^2+b^2+(a+b)^2$ nu este pătrat perfect.

(4p) **b)** Există numere naturale nenule, distincte a şi b astfel încât numărul $a^2+b^2+(a+b)^2$ să fie cub perfect?
Justificaţi răspunsul dat.

Prof. Traian Preda

III. Pe laturile ΔABC, ascuţitunghic, se construiesc în exterior pătratele $BMNC$, $ACPQ$, $ABEF$ cu centrele O_1, O_2, respectiv O_3. Dacă T este mijlocul laturii $[AB]$, să se arate că:

(3p) **a)** $[AN]\equiv[BP]$, $AN \perp BP$;

(3p) **b)** $[TO_1]\equiv[TO_2]$, $TO_1 \perp TO_2$;

(3p) **c)** $[BO_2]\equiv[O_3O_1]$, $BO_2 \perp O_3O_1$.

Prof. Cristian Olteanu

IV. *(4p)* **a)** Să se demonstreze că într-un triunghi neisoscel bisectoarea unui unghi al triunghiului şi mediatoarea laturii opuse unghiului se intersectează în exteriorul triunghiului.

***

(5p) **b)** Fie ΔABC ascuţitunghic în care $AB \neq AC$ şi $m(\angle BAC)=2m(\angle ACB)$. Bisectoarea $\angle BAC$ intersectează mediatoarea laturii BC în punctul D. Să se demonstreze că ΔABD este isoscel.

Prof. Traian Preda

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.
Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă şi completă, indiferent de metodă.
Timp de lucru: **3 ore.**

Concursul Național de Matematică "Arhimede"
Ediția a XI-a, Etapa I, 23 noiembrie 2013

Clasa a VIII-a

I. Să se arate că:

(3p) **a)** $\dfrac{1}{2013^{-2}+1}+\dfrac{1}{2013^{-1}+1}+\dfrac{1}{2013+1}+\dfrac{1}{2013^{2}+1}\in N$

(3p) **b)** $\dfrac{\sqrt{27}+\sqrt{18}}{\sqrt{75}+\sqrt{50}}\in Q\setminus N$

(3p) **c)** $\sqrt{p(p+2)+(p+4)(p+2)}\in R\setminus Q$, unde $p\in N$

II. **1)** Să se arate că:

(3p) a) $1+\dfrac{1}{n^2+2n}=\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{n+1}{n+2}$

(3p) b) $\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{8}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{15}\right)\dots\left(1+\dfrac{1}{n^2+2n}\right)\in(1,2)$, pentru orice $n\in N^*$.

(3p) **2)** Știind că numerele reale nenule x, y verifică condiția $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4020}$, să se arate că numărul $\sqrt{\left(\dfrac{x}{60}-67\right)\left(\dfrac{y}{60}-67\right)}$ este număr prim.

Prof. Ion Neață, Slatina, Olt

III. *(4p)* **a)** Să se demonstreze că $\dfrac{4}{x+y}-\dfrac{1}{xy}\le 1$ pentru orice x și y numere reale strict pozitive.

(5p) **b)** Să se demonstreze că dacă a,b,c sunt numere reale strict pozitive astfel încât $a+b+c=3$ atunci $\dfrac{1+a}{b+c}+\dfrac{1+b}{a+c}+\dfrac{1+c}{a+b}\le\dfrac{3}{abc}$.

Prof. Traian Preda

IV. Romburile $ABCD$ și $ABEF$ sunt situate în plane diferite:

(4p) **a)** Să se demonstreze că $AC\perp ED$ dacă și numai dacă $\angle FAD\equiv\angle EFA$.

(5p) **b)** Dacă $m(\angle AFE)=m(\angle BAD)=60^\circ, m(\angle DAF)=90^\circ$, să se demonstreze că $AB\perp DE$.

Prof. Traian Preda

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.
Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă și completă, indiferent de metodă.
Timp de lucru: **3 ore.**