TESTARE - CENTRUL DE EXCELENŢĂ

Clasa a IX-a

1. **(3p)** Fie $x, y, z, t \in \mathbb{Q}$ astfel încât $x + y\sqrt{2} = z + t\sqrt{2}$. Arătaţi că $x = y$ şi $z = t$.

2. **(3p)** Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $||x+1| - 2| = 3$.

3. **(1p)** Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul $\sqrt{n+1} + \sqrt{4n+21}$ este raţional.

4. **(2p)** Fie $ABCD$ un patrulater convex, M mijlocul laturii $[AD]$ şi N mijlocul laturii $[BC]$. Arătaţi că:

   a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$;

   b) $MN = \dfrac{AB + DC}{2} \Leftrightarrow AB \parallel DC$.

Soluţii. **1**. Relaţia din enunţ se rescrie sub forma

$$x - z + (y - t)\sqrt{2} = 0.$$

Dacă am avea $y - t \neq 0$, atunci ar rezulta $\sqrt{2} = \dfrac{z - t}{y - t} \in \mathbb{Q}$, contradicţie. Deci $y = t$ şi $x = z$.

2. Avem: $||x+1| - 2| = 3 \Leftrightarrow |x+1| - 2 = -3$ sau $|x+1| - 2 = 3 \Leftrightarrow |x+1| = -1$ (ecuatie care nu are solutii) sau $|x+1| = 1 \Leftrightarrow x + 1 = -1$ sau $x + 1 = 1 \Leftrightarrow x \in \{-2, 0\}$.

3. Numărul $\sqrt{n+1} + \sqrt{4n+21}$ este raţional dacă şi numai dacă $n + 1 = a^2$ şi $4n + 21 = b^2$ $(a, b \in \mathbb{N}^*)$, de unde obţinem:

$$b^2 - 4a^2 = 17 \Leftrightarrow (b - 2a)(b + 2a) = 17 \Leftrightarrow \begin{cases} b - 2a = 1 \\ b + 2a = 17 \end{cases} \Leftrightarrow a = 4 \text{ şi } b = 9.$$

Prin urmare, $n = 15$.

4. a) Adunând egalităţile

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \text{ şi } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN},$$

obţinem:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}\right) + \left(\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}\right) = \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}. \end{aligned}$$

b) $(\Leftarrow)$ Dacă $AB \parallel DC$, atunci $ABCD$ este trapez sau paralelogram, deci $MN = \dfrac{AB + DC}{2}$.

$(\Rightarrow)$ Folosind inegalitatea triunghiului, avem:

$$MN = \left|\overrightarrow{MN}\right| \leq \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{DC}\right|\right) = \frac{AB + DC}{2}.$$

Întrucât cazul de egalitate are loc dacă şi numai dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{DC}$ au acelaşi sens, deducem că $AB \parallel DC$.