TESTARE - CENTRUL DE EXCELENŢĂ

Clasa a X-a

1. **(3p)** Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei

$$p : \sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{1-\sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{7-3\sqrt{5}} = -2.$$

2. **(3p)** Se consideră numărul $x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$. Arătaţi că $x \in \mathbb{N}$.

3. **(2p)** Determinaţi numerele $z \in \mathbb{C}$ care verifică egalitatea $z^2 - 4|z| + 3 = 0$.

4. **(1p)** Fie $a, b, c > 1$. Demonstraţi că:

$$\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \geq 4\left(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b\right).$$

Soluţii. **1.** Fie $x=\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{1-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{7-3\sqrt{5}}$. Avem

$$\sqrt[3]{1-\sqrt{5}}=-\sqrt[3]{\sqrt{5}-1}=-\sqrt[6]{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=-\sqrt[6]{6-2\sqrt{5}},$$

de unde rezultă că

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{7-3\sqrt{5}} &= -\sqrt[6]{6-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{7-3\sqrt{5}}=-\sqrt[6]{\left(6-2\sqrt{5}\right)\left(7-3\sqrt{5}\right)}=\\ &= -\sqrt[6]{72-32\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

Deoarece $72-32\sqrt{5}=\left(3-\sqrt{5}\right)^3$, rezultă că

$$x=-\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{\left(3-\sqrt{5}\right)^3}=-\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}=-\sqrt{9-5}=-2,$$

deci propoziţia p este adevărată.

2. Avem $x^3=7+5\sqrt{2}+3\cdot\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\right)+7-5\sqrt{2}$, adică $x^3=14-3x$.

Obţinem $x^3+3x-14=0\Leftrightarrow(x-2)\left(x^2+2x+7\right)=0$, şi cum $x\in\mathbb{R}$, obţinem $x=2\in\mathbb{N}$.

3. Considerând $z=a+ib$, cu $a,b\in\mathbb{R}$, rezultă că $\begin{cases}a^2-b^2-4\sqrt{a^2+b^2}+3=0\\ 2ab=0\end{cases}$, de unde $a=0$ sau $b=0$.

Pentru $b=0$ rezultă $a^2-4|a|+3=0$, de unde $|a|\in\{1,3\}$, cu soluţiile $z=\pm1,\ \pm3$.

Pentru $a=0$ rezultă $b^2+4|b|-3=0$, de unde $|b|=\sqrt{7}-2$, cu soluţiile $z=\pm\left(\sqrt{7}-2\right)i$.

4. Inegalitatea de demonstrat se scrie

$$\frac{\lg b+\lg c}{\lg a}+\frac{\lg c+\lg a}{\lg b}+\frac{\lg a+\lg b}{\lg c}\geq4\left(\frac{\lg a}{\lg b+\lg c}+\frac{\lg b}{\lg c+\lg a}+\frac{\lg c}{\lg a+\lg b}\right).$$

Cu notaţiile $\lg a=x$, $\lg b=y$, $\lg c=z$, avem $x,y,z>0$, iar inegalitatea de demonstrat se scrie

$$4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)\leq\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}.$$

. Aplicând inegalitatea dintre mediile armonică şi aritmetică, avem:

$$\frac{2}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\leq\frac{y+z}{2}\Rightarrow\frac{1}{y+z}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\Rightarrow\frac{4x}{y+z}\leq\frac{x}{y}+\frac{x}{z},$$

şi, analog, $\frac{4y}{z+x}\leq\frac{y}{z}+\frac{y}{x}$, respectiv $\frac{4z}{x+y}\leq\frac{z}{x}+\frac{z}{y}$. Concluzia rezultă adunând cele trei inegalităţi obţinute.