TESTARE - CENTRUL DE EXCELENŢĂ

Clasa a XI-a

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

   (1p) a) Calculaţi $A^n,\ n \in \mathbb{N}^*$.

   (1p) b) Rezolvaţi ecuaţia $X^2 = A,\ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. **(1p)** a) Calculaţi determinantul $\begin{vmatrix} 12345 & 54321 \\ 12355 & 54341 \end{vmatrix}$.

   (1p) b) Arătaţi că $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$.

3. Calculaţi următoarele limite:

   (1p) a) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+n)^{\frac{1}{n}}$;

   (1p) b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$;

   (1p) c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^n + 2^n + ... + n^n}$.

4. **(2p)** Arătaţi că şirul cu termenul general

$$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2},\ n \geq 1$$

   este convergent.

Soluţii. **1.** a) Prin inducţie se arată că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 4^n - 1 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.

b) Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X^2 = A$. Rezultă $\det X^2 = \det A = 4$, deci $(\det X)^2 = 4$, de unde $\det X \in \{-2, 2\}$.

Notăm $t = \mathrm{Tr}(X)$. În ipoteza $\det X = 2$, folosind teorema Hamilton-Cayley, obţinem:

$$X^2 - tX + 2I_2 = 0_2 \Rightarrow tX = A + 2I_2 \Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = \pm 3.$$

Prin urmare, $X = \pm\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Asemănător, în cazul $\det X = -2$, obţinem $X = \pm\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Se probează uşor că cele patru matrice verifică ecuaţia.

2. a) Scădem prima linie din a doua şi obţinem:

$$\begin{vmatrix} 12345 & 54321 \\ 12355 & 54341 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12345 & 54321 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} = 20 \cdot 12345 - 10 \cdot 54321 = -296310.$$

b) Notăm cu Δ determinantul. Scăzând prima coloană din celelalte două coloane, obţinem

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ bc & -c(b-a) & -b(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a^2 & a+b & a+c \\ bc & -c & -b \end{vmatrix}.$$

Scădem acum coloana a treia din a doua coloană; avem

$$\begin{aligned} \Delta &= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ a^2 & b-c & a+c \\ bc & b-c & -b \end{vmatrix} = \\ &= (b-a)(c-a)(b-c)\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ a^2 & 1 & a+c \\ bc & 1 & -b \end{vmatrix} = \\ &= (b-a)(c-a)(b-c)\left(-ab - a^2 - ac + a^2 - bc\right) = \\ &= (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca). \end{aligned}$$

3. a) $(1+n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n+1} = \sqrt[n]{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \sqrt[n]{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1.$

b) $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1$ (criteriul cleştelui).

c) $\sqrt[n]{1^n + 2^n + ... + n^n} \ge \sqrt[n]{n^n} = n \to \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^n + 2^n + ... + n^n} = \infty.$

4. Deoarece $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n^2} > 0$, oricare ar fi $n \ge 1$, rezultă că şirul este strict crescător.

Pentru orice $n \ge 1$ avem:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \le 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

Fiind crescător şi mărginit superior, şirul $(a_n)_{n\ge1}$ este convergent.