ROMÂNIA
MINISTRUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MUREŞ
S.S.M.R – FILIALA MUREŞ

COLEGIUL NAŢIONAL "Al.Papiu-Ilarian" TÎRGU MUREŞ
"Per aspera ad astra!"

Colegiul Naţional "Al. Papiu-Ilarian"
Târgu Mureş, str. Bernádz György nr. 12
Tel.: 0265/250598 Fax: 0265/214498
Email: office@papiu.com
www.papiu.ro

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"Alexandru Papiu Ilarian"
25-26.10.2013
EDITIA a XVIII – a

BAREM DE EVALUARE
CLASA a V - a

Subiectul I

a) Calculaţi: $3+4\cdot\{150:15-2\cdot[5-10\cdot(441:21-105:5)]+3\}$

b) Aflaţi x din : $\{8+2\cdot[6400:16-2\cdot(37+x:23)]+42\}:2=345$

Soluţie

a)

$3+4\cdot\{150:15-2\cdot[5-10\cdot(441:21-105:5)]+3\}=$

$=3+4\cdot\{10-2\cdot[5-10\cdot(21-21)]+3\}=$ **(1p)**

$=3+4\cdot(10-2\cdot5+3)=$ **(1p)**

$=3+4\cdot3=15$ **(1p)**

b)

$\{8+2\cdot[6400:16-2\cdot(37+x:23)]+42\}:2=345$

$8+2\cdot[400:-2\cdot(37+x:23)]+42=690$

$2\cdot[400-2\cdot(37+x:23)]=640$

$400-2\cdot(37+x:23)=320$ **(2p)**

$2\cdot(37+x:23)=80$

$37+x:23=40$

$x:23=3$

Finalizare $x=69$ **(2p)**

Subiectul II

Suma dintre un număr natural, suma cifrelor lui şi ultima cifră a sa este 2013. Aflaţi numărul.

Soluţie

Se observă că numărul este format din patru cifre de forma $\overline{abcd}$ **(1p)**

relaţia devine $\overline{abcd}+a+b+c+d+d=2013$ cu $a\leq 2$ **(1p)**

I. dacă $a=2$ avem $b=0$ şi $\overline{20cd}+2+c+2d=2013$, rezultă
$2000+10c+d+c+2d=2011$ **(1p)**

rezultă $11c+3d=11$
pentru $c=0$, avem $3d=11$, imposibil,
II. pentru $c=1$, avem $d=0$ **(1p)**
dacă $a=1$, avem $a=9$ şi $\overline{19cd}+1+9+c+2d=2013$, rezultă
III. $1900+10c+d+c+2d=2003$ **(1p)**

rezultă $11c+3d=103$
pentru $c=9$, avem $3d=4$, imposibil
pentru $c=8$, avem $3d=15$, deci $d=5$
pentru $c=7$, avem $3d=26$, imposibil
pentru $c<7$, obţinem $d>9$ **(1p)**

Finalizare numerele sunt: 2010 şi 1985 **(1p)**

Subiectul III

În magazinul de nave cosmice de pe planeta X sunt 35 de nave cosmice.Unele dintre ele au câte doua locuri, unele au câte 6 locuri şi altele au câte 11 locuri. În total, se pot număra 240 de locuri în toate navele. Aflaţi câte nave sunt, din fiecare fel, ştiind că numărul celor de 6 locuri este de 4 ori mai mare decât al celor de 2 locuri.

Gazeta matematică 3/2013

Soluţie

$a+b+c=35$ **(1p)**
$2a+6b+11c=240$ **(1p)**
$b=4a$ **(1p)**
înlocuind $b=4a$ în primele două relaţii se obţine $5a+c=35$ şi $26a+11c=240$
din $5a+c=35$ rezultă $a<7$ **(1p)**
dacă $a=1$ obţinem $c=30$, care nu verifică cea de a doua relaţie
dacă $a=2$ obţinem $c=25$, care nu verifică cea de a doua relaţie
dacă $a=3$ obţinem $c=20$, care nu verifică cea de a doua relaţie
dacă $a=4$ obţinem $c=15$, care nu verifică cea de a doua relaţie
dacă $a=5$ obţinem $c=10$, care verifică cea de a doua relaţie
dacă $a=6$ obţinem $c=5$, care nu verifică cea de a doua relaţie **(2p)**
Finalizare: 5 nave cu 2 locuri, 20 nave cu 6 locuri şi 10 nave cu 11 locuri **(1p)**

Subiectul IV

Fie sirul de numere naturale : 2013,2014,2012,2013,2011,2012,2010,…, avand pe pozitia 1 numarul 2013, pe pozitia 2 numarul 2014, pe pozitia 3 numarul 2012 si asa mai departe.

a) Pe ce pozitii se gaseste numarul 2000?
b) Cati termeni are sirul?
c) Calculati produsul numerelor din sir.

Soluţie

a) Sirul este format dupa regula “un pas inainte si doi inapoi”, avand pe pozitiile impare sirul numerelor naturale descrescator. Deci pe pozitia $2n+1$, $n\geq0$ se afla numarul $2013-n$ care mai apare o data dupa alte 3 pozitii **(2p)**

Cum $2000=2013-13\Rightarrow n=13\Rightarrow 2000$ se gaseste pe pozitiile 27 si 30 **(2p)**

b) Cum $0=2013-2013\Rightarrow n=2013\Rightarrow 0$ se găseşte pe poziţia 4027 după care mai apare $1\Rightarrow$Sirul are 4028 termeni **(2p)**

c) Cum in sir apare si 0, produsul este 0 **(1p)**

	ROMÂNIA **MINISTRUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE** **INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MUREŞ** **S.S.M.R – FILIALA MUREŞ** **Colegiul Naţional "Al. Papiu-Ilarian"** Târgu Mureş, str. Bernádz György nr. 12 Tel.: 0265/250598 Fax: 0265/214498 Email: office@papiu.com www.papiu.ro

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"Alexandru Papiu Ilarian"
25-26.10.2013
EDITIA a XVIII – a

BAREM DE EVALUARE
CLASA a VI - a

Subiectul I

Fie A suma pătratelor a 10 numere naturale consecutive şi $B = 11^4 + 22^4 + 33^4 + ... + 99^4$.

Aflaţi resturile împărţirii numerelor A şi B la 10.

Prof.Danciu Alin Florin

Solutie

Ultima cifră a numărului A este ultima cifră a numărului $0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2$ (1p), adică ultima cifră a numărului $0+1+4+9+6+5+6+9+4+1$, care este 5 (2p), rezultă că restul împărţirii lui A la 10 este 5. (1p)

Ultima cifră a numărului B este ultima cifră a numărului $1+6+1+6+5+6+1+6+1$, care este 3 (2p), rezultă că restul împărţirii lui B la 10 este 3. (1p)

Subiectul II

Un număr natural diferit de 0 şi 1 se numeşte ***număr bun mureşan***, dacă este număr prim sau pătrat perfect.

a. Verificaţi dacă numerele 2013 şi 1225 sunt numere bune mureşene.
b. Arătaţi că dacă numărul divizorilor unui număr natural, diferit de 0 şi 1 este număr prim, atunci este număr bun mureşan.

Prof.Vasile Gînţa, prof.Szabo Zoltan

Solutie

a. 2013 = 3 x 671 este număr compus, $\Rightarrow$ 2013 **nu este** prim (1)
1936 < 2013 < 2025
$44^2 < 2013 < 45^2$, $\Rightarrow$ 2013 **nu este** pătrat perfect (2)
Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ 2013 ***nu este număr bun mureşan.*** (1p)

1225 = 5 x 5 x 7 x 7 = 35^2 este pătrat perfect $\Rightarrow$ 1225 ***este număr bun mureşan.*** (1p)

b. Dacă $n \geq 2$, atunci n descompus în factori primi este de forma $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_k^{n_k}$, unde $p_1, p_2, ..., p_k$ sunt numere prime.
Notăm cu N numărul divizorilor lui n, şi avem $N=(n_1+1)(n_2+1)...(n_k+1)$. (1p)
N este număr prim, atunci el este egal cu 2 sau este număr impar. (1p)
Cazul 1.
Dacă N = 2, atunci unul din factorii lui N este egal cu 2, iar ceilalti sunt egali cu 1.Deci $n_1+1 = 2$ (de exemplu) si $n_2+1= n_3+1=... =n_k+1=1$.Vom avea $n_1 = 1$ si $n_2= n_3=... =n_k=0$ de unde rezulta n= p_1 număr prim.(1p)
Cazul 2.
Dacă N = 2k+1 (prim), atunci unul din factorii lui N este egal cu 2k+1, iar ceilalţi sunt egali cu 1. Vom avea $n_1 = 2k$ si $n_2= n_3=... =n_k=0$ de unde rezultă n= p_1^{2k} pătrat perfect.(2p)

Subiectul III

Determinati primele trei cifre zecimale ale numarului $n = \dfrac{0,1234...20122013}{0,20132012...4321}$.

Prof.Radu Botez

Solutie

$\dfrac{0,12345}{0,20133} \approx 0,6131$ (1p)

$\dfrac{0,12346}{0,20132} \approx 0,6132$ (1p)

Deducem că, $0,6131 < \dfrac{0,12345}{0,20133} < n < \dfrac{0,12346}{0,20132} < 0,6132$ (3p). În final primele trei zecimale ale numărului ***n*** sunt 6, 1 şi 3. (2p)

Subiectul IV

Aratati ca numarul $A = 6^{3n+2} + 6^{3n+1} + 1$ se divide cu 43, pentru orice numar natural n.

Gazeta matematică 6-7-8/2013

Soluţie

$A = 6^{3n+2} + 6^{3n+1} + 1 = 6^{3n}(6^2 + 6) + 1$ (2p)

$A = 6^{3n} \cdot 42 + 1 = (6^3)^n (43 - 1) + 1 = 216^n \cdot 43 - 216^n + 1$ (2p)

$A = M_{43} - (215+1)^n + 1 = M_{43} - (43 \cdot 5 + 1)^n + 1$ (2p)

$A = M_{43} - 1 + 1 = M_{43}$ (1p)

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"Alexandru Papiu Ilarian"
25-26.10.2013
EDITIA a XVIII – a

BAREM DE EVALUARE
CLASA a VII - a

Subiectul I

Se consideră numărul $A(n)=\frac{1}{n}\cdot\left(1\frac{1}{2013}+1\frac{2}{2013}+...+1\frac{n}{2013}\right)-\frac{n+1}{4026}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

a. Calculaţi valoarea numărului A pentru $n=5$;

b. Arătaţi că A este număr natural pentru orice număr $n\in\mathbf{N}^*$.

Solutie

a) $A(5)=\frac{1}{5}\left(1\frac{1}{2013}+1\frac{2}{2013}+1\frac{3}{2013}+1\frac{4}{2013}+1\frac{5}{2013}\right)-\frac{6}{4026}$ (1p)

$$A(5)=\frac{1}{5}\left(\frac{2013+1}{2013}+\frac{2013+2}{2013}+\frac{2013+3}{2013}+\frac{2013+4}{2013}+\frac{2013+5}{2013}\right)-\frac{6}{4026}$$ (1p)

$$A(5)=\frac{1}{5}\left(\frac{5\cdot 2013+15}{2013}\right)-\frac{6}{4026}=\frac{1}{5}\cdot\frac{5(2013+3)}{2013}-\frac{3}{2013}=\frac{2013}{2013}=1$$ (1p)

b) $A(n)=\frac{1}{n}\cdot\left(1\frac{1}{2013}+1\frac{2}{2013}+...+1\frac{n}{2013}\right)-\frac{n+1}{4026}$

$$A(n)=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2013+1}{2013}+\frac{2013+2}{2013}+...+\frac{2013+n}{2013}\right)-\frac{n+1}{4026}$$

$$A(n)=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2013n+(1+2+3+...+n)}{2013}\right)-\frac{n+1}{4026}$$ (1p)

$$A(n)=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2013n+\frac{n(n+1)}{2}}{2013}\right)-\frac{n+1}{4026}$$

$$A(n)=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{4026n+n^2+n}{4026}\right)-\frac{n+1}{4026}$$ (1p)

$$A(n)=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(4027+n)}{4026}-\frac{n+1}{4026} \quad \text{(1p)}$$

$$A(n)=\frac{4027+n}{4026}-\frac{n+1}{4026}=\frac{4026}{4026}=1\in\mathbf{N} \quad \textbf{(1p)}$$

***

Subiectul II

Demonstraţi că numărul $2014^{20122013}+2015^{20132014}$ nu se poate scrie ca sumă de două numere prime.

Elev Buna- Mărginean Alex, cls.a IX-a, C.N Al.Papiu Ilarian

Solutie

Presupunem, prin reducere la absurd că numărul $A = 2014^{20122013}+2015^{20132014}$ se poate scrie ca o sumă de două numere prime. (1p)

Cum A este impar, rezultă că acesta acesta se scrie sub forma A=2+p, unde p= $2014^{20122013}+2015^{20132014}-2$ este un număr prim. (1p)

Dar $2014^{20122013}+2015^{20132014}=(2016-2)^{20122013}+(2016-1)^{20132014}-2$. (1p)

Folosindu-ne de formula $(a+b)^n = M_a + b^n$, unde a,b,n sunt numere naturale şi M_a înseamnă un multiplu natural al numărului a, obţinem:

$p=M_{2016}+(-2)^{20122013}+M_{2016}+(-1)^{20132014}-2=M_{2016}+2^{20122013}-1$. (1p)

Dar $2016=7\cdot 288$, de unde $p=M_7+2^{20122013}-1$. (1p)

Atunci:

$p=M_7+8^{2012671}-1=M_7+(7+1)^{2012671}-1=M_7+M_7+1-1=M_7$ (1p)

de unde rezultă că p este un număr prim divizibil cu 7, absurd(evident p nu poate fi 7).

Astfel, rezultă că numărul $2014^{20122013}+2015^{20132014}$ nu se poate scrie ca o sumă de două numere prime. (1p)

Subiectul III

Se consideră pătratul $ABCD$ şi punctele $E \in (AB)$, respectiv $F \in (BC)$ astfel încât $AB = 2AE$ şi $BC = 4BF$. Să se demonstreze că:

a. $DE \perp EF$;

b. $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle FDE$.

***

Solutie.

a) Fie M mijlocul laturii (BC) rezultă că (EF) este linie mijlocie în triunghiul ABM, deci $EF \parallel AM$. (1p)

Din congruenta triunghiurilor dreptunghice ABM, respectiv DAE (C.C) rezultă $m(\sphericalangle MAB) = m(\sphericalangle EDA) = 90^\circ - m(\sphericalangle AED)$, de unde rezultă $DE \perp AM$ *(1p)*

Deci $DE \perp EF$. (1p)

b). Fie $\{G\} = AD \cap EF$. Din congruenta triunghiurilor dreptunghice BEF, respectiv AEG rezulta că $EF \equiv EG$,(1p) asadar (DE) este mediana, respectiv înălţime în triunghiul DGF, deci triunghiul DGF este isoscel (1p), adică (DE este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADF$ *(1p)*

Deci, $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle FDE$. (1p)

Subiectul IV

Pe laturile paralelogramului $ABCD$ se construiesc spre exterior triunghiurile echilaterale AEB, BFC, CGD, DHA. Să se arate că:

a) Patrulaterul $EFGH$ este un paralelogram.

b) Triunghiurile EDF şi GBH sunt echilaterale şi congruente.

Maria Pop, Cluj-Napoca

Solutie.

a) Arătăm că $\Delta HDG \equiv \Delta FBE$: $BF \equiv BC \equiv AD \equiv DH$ şi $BF \parallel DH$ (deoarece $CB \parallel AD$ şi $\sphericalangle CBF \equiv \sphericalangle ADH$). (1p)

Analog $BE \equiv DG$ si $BE \parallel DG$. Din $FB \parallel HD$ si $EB \parallel GD$ rezultă $\sphericalangle FBE \equiv \sphericalangle HDG$.(1p)

În plus din $BF \parallel DH$ şi $\sphericalangle BFE \equiv \sphericalangle DHG$ rezultă $HG \parallel EF$ (şi cu $HG = EF$), deci $EFGH$ este paralelogram. (1p)

b) Arătăm că $\Delta CDF \equiv \Delta AED$: $CD \equiv AB \equiv AE$; $CF \equiv BC \equiv AD$ şi $m(\sphericalangle DCE) \equiv m(\sphericalangle C) + 60^\circ = m(\sphericalangle A) + 60^\circ = m(\sphericalangle EAD)$. Rezultă $DE \equiv DF$. (2p)

În plus,

$$m(\sphericalangle EDF) + m(\sphericalangle CDF) + m(\sphericalangle ADE) = m(\sphericalangle D) \Leftrightarrow m(\sphericalangle EDF) + m(\sphericalangle DEA) + m(\sphericalangle ADE) = 180^\circ - m(\sphericalangle A)$$

$$\Leftrightarrow m(\sphericalangle EDF) + [180^\circ - m(\sphericalangle A) - 60^\circ] = 180^\circ - m(\sphericalangle A) \Leftrightarrow m(\sphericalangle EDF) = 60^\circ.$$ (1p)

În concluzie triunghiul EDF este echilateral. (1p)

Analog se arată că triunghiul GBH este echilateral: $\Delta HAB \equiv \Delta BCG$, $BH \equiv BG$ şi $m(\sphericalangle HBG) = 60^\circ$,

Pentru congruenţa triunghiurilor echilaterale EDF şi GBH este suficient să folosim de la a) congruenta: $EF \equiv GH$.

Observaţie. Şi triunghiurile HCE şi FAG sunt echilaterale şi congruente.

	ROMÂNIA **MINISTRUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE** **INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MUREŞ** **S.S.M.R – FILIALA MUREŞ** **Colegiul Naţional "Al. Papiu-Ilarian"** Târgu Mureş, str. Bernádz György nr. 12 Tel.: 0265/250598 Fax: 0265/214498 Email: office@papiu.com www.papiu.ro

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"Alexandru Papiu Ilarian"
25-26.10.2013
EDITIA a XVIII – a

BAREM DE EVALUARE
CLASA a VIII - a

Subiectul I

Arătati că dacă $x \in (a;b)$ şi $y \in (c;d)$, unde $a,b,c,d, x,y\in\mathbf{R}$, $a < b$ şi $c < d$, atunci este adevărată inegalitatea: $2xy - x(c+d) - y(a+b) + ad + bc < 0$.

***

Solutie

$$\left.\begin{array}{l} x > a \Rightarrow x - a > 0 \\ y < d \Rightarrow y - d < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-a)(y-d) < 0 \Rightarrow xy - xd - ay + ad < 0 \qquad (3p)$$

$$\left.\begin{array}{l} x < b \Rightarrow x - b < 0 \\ y > c \Rightarrow y - c > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-b)(y-c) < 0 \Rightarrow xy - xc - by + bc < 0 \qquad (2p)$$

Adunând relatiile de mai sus se obtine: $2xy - x(c+d) - y(a+b) + ad + bc < 0$ (2p)

Subiectul II

Să se determine numerele naturale n pentru care numărul $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ este număr raţional.

Maria Pop, Cluj-Napoca

Solutie

Dacă $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathrm{N}$, $q \neq 1$ atunci $\frac{q}{p} = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

si astfel din $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \in \mathrm{Q}$ si $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \in \mathrm{Q}$ (2p)

Rezultă $\sqrt{n+1} \in \mathrm{Q}$ si $\sqrt{n} \in \mathrm{Q} \Rightarrow \sqrt{n+1} \in \mathrm{N}$ si $\sqrt{n} \in \mathrm{N}$. (1p)

Rezultă $n = k^2$, $k \in \mathrm{N}$ si $\sqrt{k^2+1} \in \mathrm{N}$. (2p)

Dar $\sqrt{k^2+1} > k$ si $\sqrt{k^2+1} \le k+1$ $(\Leftrightarrow k^2+1 \le k^2+2k+1)$ cu egalitate doar pentru $k = 0$. (1p)

Astfel $n = 0$ este unicul număr natural n pentru care $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ este numar rational. (1p)

Subiectul III

Fie triunghiurile ABC şi ADE în plane difrerite cu mediana AM comună, $\{M\} = BC \cap DE$ şi punctele P, Q, R şi S, respectiv pe segementele [AB], [AC], [AD] şi [AE] astefel încât $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} = \frac{AR}{RD} = \frac{AS}{SE}$. Să se arate că:

a. P,R,Q,S sunt vârfurile unui paralelogram;

b. Dacă $AB^2 + AC^2 = AD^2 + AE^2$, atunci P, R, Q, S sunt vârfurile unui dreptunghi.

***

Solutie

a) Conform R.T.Thales,din faptul că $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ rezulta PQ || BC. Analog avem SR || ED (2p)

Notam $\{O\} = AM \cap PQ$ si $\{O'\} = AM \cap SR$

Din M mijlocul [BC] si [ED] obtinem O mijlocul [PQ] si O' mijlocul [SR] .

Deci $\frac{AS}{SE} = \frac{AO'}{O'M}$ si $\frac{AP}{PB} = \frac{AO}{OM}$ obtinem O=O'. (1p)

Deci PQ si RS au acelasi mijloc, adica PRQS paralelogram. (1p)

b) Aplicand Teorema medianei in triunghiurile ABC si AED si utilizand relatia din ipoteza, rezulta ca BC=DE. (1p)

Din TFA rezulta PQ=RS (1p)

Deci PRQS dreptungi (1p)

Subiectul IV

Demonstraţi că numărul $2014^{20122013} + 2015^{20132014}$ nu se poate scrie ca sumă de două numere prime.

Elev Buna- Mărginean Alex, cls.a IX-a, C.N Al.Papiu Ilarian

Solutie

Presupunem, prin reducere la absurd că numărul $A = 2014^{20122013} + 2015^{20132014}$ se poate scrie ca o sumă de două numere prime. (1p)

Cum A este impar, rezultă că acesta acesta se scrie sub forma A=2+p, unde $p = 2014^{20122013} + 2015^{20132014} - 2$ este un număr prim. (1p)

Dar $2014^{20122013} + 2015^{20132014} = (2016-2)^{20122013} + (2016-1)^{20132014} - 2$. (1p)

Folosindu-ne de formula $(a+b)^n = M_a + b^n$, unde a, b, n sunt numere naturale şi M_a înseamnă un multiplu natural al numărului a, obţinem:

$p = M_{2016} + (-2)^{20122013} + M_{2016} + (-1)^{20132014} - 2 = M_{2016} + 2^{20122013} - 1$. (1p)

Dar $2016 = 7 \cdot 288$, de unde $p = M_7 + 2^{20122013} - 1$. (1p)

Atunci:

$p = M_7 + 8^{2012671} - 1 = M_7 + (7+1)^{2012671} - 1 = M_7 + M_7 + 1 - 1 = M_7$ (1p)

de unde rezultă că p este un număr prim divizibil cu 7, absurd(evident p nu poate fi 7).

Astfel, rezultă că numărul $2014^{20122013} + 2015^{20132014}$ nu se poate scrie ca o sumă de două numere prime. (1p)