

INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI OLT
ȘCOALA GIMNAZIALĂ „NICOLAE TITULESCU”, CARACAL, OLT

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„ISOSCEL”

-Ediția a VIII-a – 26 octombrie 2013-

1 Clasa a V-a

1. Pe foaia de examen scrieți doar răspunsurile (rezultatele):

- (a) Aflați valoarea lui x din egalitatea

$$[(x + 2013) \cdot 2013 - 2013] : 2013 = 2014.$$

Gazeta Matematică nr. 9/2013, Suplimentul cu exerciții

- (b) Determinați toate numerele naturale de trei cifre care au proprietatea că, atât atunci când eliminăm cifra zecilor, cât și atunci când eliminăm cifra unităților, se obține de fiecare dată un număr natural de 10 ori mai mic decât numărul inițial.

Gazeta Matematică nr. 5/2013, Suplimentul cu exerciții

- (c) Alex așează 323 de timbre într-un clasor, astfel încât pe fiecare pagină să fie cu două timbre mai mult decât pe pagina precedentă. Câte timbre a așezat Alex pe prima pagină, și câte pagini are clasorul, dacă nu au rămas pagini libere?

Gazeta Matematică nr. 3/2013, Suplimentul cu exerciții

- (d) Determinați numerele naturale \overline{abc} știind că $\overline{abc} + a \cdot b \cdot c = 129$ și $\overline{cba} - c \cdot b \cdot a = 315$.

Gazeta Matematică nr. 9/2013, Suplimentul cu exerciții

2. Aflați două numere naturale cu produsul egal cu 120, știind că împărțind suma lor la diferența lor, obținem câtul 1 și restul 10.

Mihaela Marinescu

3. Pe un ecran este scris numărul 34. După fiecare minut, în locul numărului afișat pe ecran, se scrie un număr cu 18 mai mare decât produsul cifrelor sale.

- a) Ce număr va fi scris pe ecran după două minute?
b) Ce număr va fi scris pe ecran după 2013 minute?

Cristina Drăgan

2 Clasa a VI-a

1. Pe foaia de examen scrieți doar răspunsurile (rezultatele):

- (a) Determinați cifrele distincte a , b și c , cu $b < c$, știind că $\overline{ab} \cdot \overline{ac} = 1974$.

Gazeta Matematică nr. 9/2013, Suplimentul cu exerciții

- (b) Aflați numerele naturale nenule n pentru care numărul $n^2 + n$ are patru divizori.

Gazeta Matematică nr. 5/2013, Suplimentul cu exerciții

- (c) Determinați toate tripletele de numere naturale x , y , z pentru care $(x + 2)(2y + 3)(3z + 4) = 2013$.

Gazeta Matematică nr. 4/2013, Suplimentul cu exerciții

- (d) Determinați câte numere naturale de trei cifre dau restul 7 când sunt împărțite la un număr de o cifră.

Gazeta Matematică nr. 4/2013, Suplimentul cu exerciții

2. Cangurul Alef se află în punctul A și poate face doar sărituri de 3 metri. Cangurul Dalet se află în punctul D , aflat la 2013 m de A , și poate face doar sărituri de 5 metri. Ei vor să facă schimb de locuri, sărind unul spre altul, pe dreapta care unește punctele A și D .

- a) Arătați că Alef poate ajunge în D , dar Dalet nu poate ajunge în A .
b) La câți metri de A , pe drumul dinspre D spre A , se află cel mai apropiat punct în care poate ajunge Dalet?
c) Știind că cei doi canguri pleacă simultan și efectuează săriturile în același timp, arătați că ei nu se pot întâlni (nu pot ateriza în același punct).
d) Prin câte puncte comune au trecut cei doi canguri până când Alef ajunge în D ?

Costel Anghel

3. Determinați câte numere naturale de trei cifre se pot scrie sub forma $\overline{abc} + \overline{ab} + a$.

Andrei Eckstein

3 Clasa a VII-a

1. Pe foaia de examen scrieți doar răspunsurile (rezultatele):

(a) Aflați numerele naturale nenule x, y, z, t știind că $x + \frac{1}{y + \frac{1}{z + \frac{1}{t}}} = \frac{187}{29}$.

Gazeta Matematică nr. 2/2013, Suplimentul cu exerciții

(b) Fie a, b, c numere raționale astfel încât $b \neq 2c$ și $\frac{a-b+2c}{a-2b+5c} = \frac{1}{2}$. Calculați raportul $\frac{a-3b+5c}{5a-24b+43c}$.

Gazeta Matematică nr. 1/2013, Suplimentul cu exerciții

(c) Determinați numerele pozitive x, y, z știind că $xy + yz + zx = 188$ și $\frac{2x}{2x+6} = \frac{5y}{5y+25} = \frac{4z}{4z+16}$.

Gazeta Matematică nr. 2/2013, Suplimentul cu exerciții

(d) Fie H ortocentrul triunghiului ascuțitunghic ABC . Măsurile unghiurilor $\angle AHB, \angle BHC$, respectiv $\angle CHA$ sunt direct proporționale cu 10, 15 și 11. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC .

Gazeta Matematică nr. 4/2013, Suplimentul cu exerciții

2. Fie M mulțimea formată din toate numerele de 8 cifre distincte care se scriu folosind cifrele de la 2 la 9.

a) Determinați numărul de elemente al mulțimii M .

b) Arătați că oricum am alege două numere diferite din mulțimea M , restul împărțirii unuia dintre numere la celălalt este nenul.

Acad. Nicolae Teodorescu

3. Se consideră triunghiul ABC , în care $m(\widehat{BAC}) = 120^\circ$. Bisectoarele $[AD]$, $[BE]$ și $[CF]$ ale triunghiului, unde $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$, se intersectează în I . Fie $\{M\} = DE \cap CF$ și $\{N\} = DF \cap BE$. Arătați că:

a) $[DE]$ este bisectoarea unghiului $\angle ADC$ și $[DF]$ este bisectoarea unghiului $\angle ADB$;

b) triunghiurile $\triangle MIE$ și $\triangle NIF$ sunt isoscele.

Costel Anghel

4 Clasa a VIII-a

1. Pe foaia de examen scrieți doar răspunsurile (rezultatele):

(a) Numerele reale a și b verifică relația $4a^2 + 4b^2 - 12a + 12b + 18 = 0$. Calculați suma $a + b$.

Gazeta Matematică nr. 3/2013, Suplimentul cu exerciții

(b) Numerele reale x și y au proprietățile: $x^4 = y^4 + 48$, $x^2 + y^2 = 12$ și $x > 2 + y$. Calculați $x + y$.

Gazeta Matematică nr. 1/2013, Suplimentul cu exerciții

(c) Fie m, n, p numere naturale nenule. Determinați numărul real x care verifică relația:

$$\frac{x-m-n}{p} + \frac{x-n-p}{m} + \frac{x-p-m}{n} = 3.$$

Gazeta Matematică nr. 2/2013, Suplimentul cu exerciții

(d) În trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, se cunosc $AD = CD = 13$ cm, $BC = 8$ cm și $m(\angle B) = 60^\circ$. Aflați perimetrul trapezului.

Gazeta Matematică nr. 2/2013, Suplimentul cu exerciții

2. Determinați numerele naturale m și n pentru care numerele $3m + 2n + 6$, $5m + 4n + 1$ și $7m + 5n + 3$ să fie, în această ordine, pătrate perfecte consecutive.

Aurel Dobosan

3. Spunem că un număr natural este s -pătratic dacă el se scrie ca suma a două pătrate perfecte. Spre exemplu, 61 este un număr s -pătratic, întrucât $61 = 5^2 + 6^2$.

a) Arătați că produsul a două numere s -pătratice este un număr s -pătratic.

b) Fie $n \in \mathbb{N}$ un număr natural cu proprietatea că $9n$ este un număr s -pătratic. Arătați că $13n$ este un număr s -pătratic.

Costel Anghel

Solutii

5 Clasa a V-a

- (a) 2. (b) 100, 200, ..., 900 (9 numere). (c) 3 timbre pe prima pagină, 17 pagini. (d) $\overline{abc} = 123$.
- Din teorema împărțirii cu rest, obținem că $a + b = 1 \cdot (a - b) + 10$, de unde $b = 5$. Atunci $a = 24$.
- (a) După un minut, pe ecran este scris numărul $3 \cdot 4 + 18 = 30$, iar după două minute este scris numărul $3 \cdot 0 + 18 = 18$.
(b) La trei minute de la pornire, pe ecran apare numărul $1 \cdot 8 + 18 = 26$, iar după încă un minut, numărul $2 \cdot 6 + 18 = 30$.

Se observă că, din acest punct, numerele afișate pe ecran încep să se repete în ordinea: 30, 18, 26, 30, 18, 26, ... (ele se repetă din trei în trei minute). Cum $2013 : 3 = 671$ (rest 0), după 2013 minute va fi afișat pe ecran același număr ca și după trei minute, adică 26.

6 Clasa a VI-a

- (a) $a = 4$, $b = 2$, $c = 7$. (b) $n = 2$. (c) $x = 1$, $y = 4$, $z = 19$ sau $x = 9$, $y = 0$, $z = 19$. (d) 299 (Sunt 123 de numere de forma $M_8 + 7$ și câte 100 de numere de forma $M_9 + 7$, respectiv de forma $M_9 + 8$. Dintre acestea, 12 sunt atât de forma $M_8 + 7$ cât și de forma $M_9 + 7$, iar alte 12 sunt atât de forma $M_8 + 7$ cât și de forma $M_9 + 8$).
- (a) Deoarece 2013 este divizibil cu 3 și $2013 : 3 = 671$, Alef poate ajunge în D după 671 de sărituri.
Cum 5 nu divide 2013, Dalet nu poate ajunge în A .
(b) După p sărituri, Dalet ajunge la $2013 - 5p$ metri față de A . Deoarece $2013 - 5p \geq 0$, rezultă $p \leq 402$. După 402 sărituri, Dalet ajunge la 3 m de A .
(c) După n sărituri, Alef este la $3n$ metri față de A , iar Dalet la $2013 - 5n$ metri față de A . Presupunând că cei doi canguri ar ajunge în același punct după n sărituri, atunci am avea $3n = 2013 - 5n$, adică $8n = 2013$, relație care nu este verificată de niciun număr natural k .
(d) Dacă Alef ajunge în punctul M după m sărituri, iar Dalet după n sărituri (evident, cei doi ajung în M la momente diferite de timp), atunci, $AM = 3m$, $DM = 5n$, unde $m, n \in \mathbb{N}$ și $3m + 5n = 2013$. Rezultă că $3 \mid n$, de unde se obține $n = 3k$ și $m = 671 - 5k$.

Atunci $m - 1 = 670 - 5k$, deci $5 \mid m - 1$, de unde $m = 5p + 1$, cu $p \in \mathbb{N}$. Rezultă

$$5p + 1 = 671 - 5k \Rightarrow p + k = 134.$$

Sunt posibile 135 de alegeri pentru (p, k) , deci cangurii trec prin 135 de puncte comune.

- Numărul \overline{abc} poate fi ales în 900 de moduri (de la 100 la 999); pentru fiecare alegere a lui \overline{abc} , calculând suma $\overline{abc} + \overline{ab} + a$, obținem 900 de rezultate. Acest lucru nu înseamnă că soluția problemei este 900, deoarece trebuie să verificăm dacă nu cumva două sau mai multe dintre aceste rezultate sunt egale și, de asemenea, câte dintre aceste rezultate sunt mai mari decât 999 (adică au patru cifre și nu trei așa cum cere problema).

Referitor la prima verificare, dacă $\overline{abc} + \overline{ab} + a = \overline{pqr} + \overline{pq} + p$, atunci $111a + 11b + c = 111p + 11q + r$. Deoarece $0 \leq 11b + c \leq 108$, rezultă că $a = p$, de unde se obține și că $b = q$ și $c = r$. Așadar, cele 900 de rezultate ale calculelor de forma $\overline{abc} + \overline{ab} + a$, când \overline{abc} ia valori de la 100 la 999 sunt distincte. Să vedem câte din acestea sunt numere de patru cifre. Pentru aceasta, avem:

$$111a + 11b + c \geq 1000,$$

de unde rezultă cu necesitate $a = 9$ și $11b + c \geq 1$, ceea ce înseamnă că dintre numerele de forma \overline{abc} , cu $a = 9$, doar 900 dă un rezultat "bun".

În concluzie, problema are 801 soluții.

7 Clasa a VII-a

1. (a) $x = 6, y = 2, z = 4, t = 3$. (b) $\frac{1}{8}$. (c) $x = 6, y = 10, z = 8$. (d) $m(\sphericalangle A) = 30^\circ, m(\sphericalangle B) = 70^\circ, m(\sphericalangle C) = 80^\circ$.

2. (a) Prima cifră a unui număr din mulțimea m se poate alege în 8 moduri, a doua în 7 moduri, a treia în 6 moduri etc. Numărul de elemente ale lui M este $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 8! = 40\,320$.

(b) Enunțul este echivalent cu a spune că niciunul dintre numerele din M nu este divizorul vreunui alt număr din M .

Împărțind pe 98765432 (cel mai mare număr al mulțimii M) la 23456789 (cel mai mic număr din M), se obține câtul 4 (și un rest nenul), deci dacă $x \in M$ ar fi divizibil cu $y \in M$, atunci ar trebui să aibă loc una din relațiile $x = 2y$ sau $x = 3y$ sau $x = 4y$.

Se observă că toate numerele din M au suma cifrelor 44, deci sunt de forma $M_9 + 8$.

Concluzia rezultă din faptul că $2 \cdot (M_9 + 8) = M_9 + 7, 3 \cdot (M_9 + 8) = M_9 + 6$ și $4 \cdot (M_9 + 8) = M_9 + 5$.

3. (a) Construim $EP \perp AB, P \in AB, EQ \perp AD, Q \in AD, ER \perp BC, R \in BC$. Atunci $m(\sphericalangle EAP) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, deci $[AE]$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle PAD$, de unde $EP = EQ$. Dar $EP = ER$, deci $EQ = ER$, adică E se află pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADC$, sau, altfel spus, $[DE]$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADC$.

Analog se arată că $[DF]$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADB$.

(b) Avem $m(\sphericalangle EIC) = \frac{m(\sphericalangle B)}{2} + \frac{m(\sphericalangle C)}{2} = 30^\circ$, iar

$$m(\sphericalangle EMC) = m(\sphericalangle MDC) + \frac{m(\sphericalangle C)}{2} = \frac{m(\sphericalangle ADC)}{2} + \frac{m(\sphericalangle C)}{2} = \frac{180^\circ - m(\sphericalangle DAC)}{2} = 60^\circ.$$

Rezultă $m(\sphericalangle IEM) = m(\sphericalangle EMC) - m(\sphericalangle EIM) = 30^\circ$, deci $\triangle MIE$ este isoscel. Analog, $\triangle NIF$ este isoscel.

8 Clasa a VIII-a

1. (a) 0. (b) 1. (c) $x = m + n + p$. (d) 62 cm.

2. Fie $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $k^2 = 5m + 4n + 1$; atunci $3m + 2n + 6 = (k - 1)^2$ și $7m + 5n + 3 = (k + 1)^2$. Obținem:

$$\begin{aligned} 3m + 2n + 6 = k^2 - 2k + 1 & \quad \left| \begin{array}{l} (+) \\ \Rightarrow \end{array} \right. 10m + 7n + 9 = 2k^2 + 2 \Rightarrow 10m + 7n + 7 = 2k^2 \Rightarrow 10m + 7n + 7 = 2(5m + 4n + 1), \end{aligned}$$

de unde se obține $n = 5$. Înlocuind, rezultă relațiile $k^2 - 2k + 1 = 3m + 16, k^2 = 5m + 21$ și $k^2 + 2k + 1 = 7m + 28$.

Obținem $k = m + 3$, de unde, înlocuind în $k^2 = 5m + 21$, obținem $m^2 + m = 12$, cu soluția $m = 3$.

3. (a) Dacă $x = a^2 + b^2$ și $y = c^2 + d^2$, atunci

$$\begin{aligned} xy &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = \\ &= (a^2c^2 + 2ac \cdot bd + b^2d^2) + (a^2d^2 - 2ad \cdot bc + b^2c^2) = \\ &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2. \end{aligned}$$

(b) Fie $p, q \in \mathbb{N}$ astfel încât $9n = p^2 + q^2$; atunci $3 \mid p^2 + q^2$, de unde, studiind toate posibilitățile în funcție de restul împărțirii lui p și q la 3, se obține că $3 \mid p$ și $3 \mid q$, adică $p = 3r$ și $q = 3s$, cu $r, s \in \mathbb{N}$. Atunci $9n = 9r^2 + 9s^2$, deci $n = r^2 + s^2$.

Rezultă $13n = (2^2 + 3^2)(r^2 + s^2) = (2r + 3s)^2 + (2s - 3r)^2$, adică $13n$ este număr s -pătratic.