

Danube Mathematical Competition

Călărași, 2 noiembrie 2013

Problema 1. Determinați numerele naturale $n \geq 2$ pentru care există $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^*$ astfel încât

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 0.$$

Problema 2. Se consideră 64 numere naturale distincte, cel mult egale cu 2012. Arătați că se pot alege patru numere dintre acestea, notate a, b, c, d , astfel încât $a + b - c - d$ să fie multiplu de 2013.

Problema 3. Determinați numerele naturale m, n astfel încât $85^m - n^4 = 4$.

Problema 4. Se consideră dreptunghiul $ABCD$, cu $AB \neq BC$, cu centrul în punctul O . Perpendiculara în O pe dreapta BD intersectează dreptele AB și BC în punctele E , respectiv F . Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor $[CD]$, respectiv $[AD]$. Demonstrați că $FM \perp EN$.