

CONCURSUL INTERNAȚIONAL „ION BARBU - DAN BARBILIAN”

Ediția a XVIII - a, Călărași, 1 - 3 noiembrie 2013

Clasa a VIII-a

P1. a) Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \neq b, c \neq -a, c \neq -b$ și $a^2 + b^2 = 2c^2$ arătați că

$$\frac{(a+b+2c)(2a^2-b^2-c^2)}{(a-b)(a+c)(b+c)} = 3.$$

b) Dacă $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ astfel încât $a \geq b \geq c$ arătați că $\frac{a^3 - c^3}{3} \geq abc \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} \right)$.

c) Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea $a^3 + b^3 = c^3$. Arătați că cel puțin unul dintre numerele a, b, c este divizibil cu 3.

P 2. a) Fie triunghiul ABC și punctele $D \in (AB), E \in (BC), F \in (AC)$. Dacă triunghiul ADF este ascuțit unghic, $[EB] = [ED]$ și $[EF] = [EC]$ arătați că centrul cercului circumscris triunghiului ADF aparține bisectoarei unghiului DEF .

b) În pătratul $ABCD$, M este mijlocul laturii $[AB]$ și $N \in (AD)$ astfel încât $AN = 2DN$. Perpendiculara în M pe CM și perpendiculara în N pe CN se intersectează în Q . Arătați că punctele A, Q și C sunt coliniare.

P 3. Dacă ABC este un triunghi în care $[AB] = [AC], D \in (BC), [BD] = [CD], E \in (BC), E \neq D, F \in AC$ și $AE \parallel BF$ arătați că $BC \cdot BF > 4AD \cdot BE$.

P 4. Fie A o mulțime de 5 numere naturale și $S = \{x + y \mid x, y \in A\}$. Să se arate că dacă mulțimea S are 9 elemente atunci suma numerelor din mulțimea A este divizibilă cu 5.

Succes

Barem de notare: **P1.** a) 3 puncte; b) 2 puncte; c) 2 puncte. **P2.** a) 4 puncte; b) 3 puncte. **P3.** 7 puncte. **P4.** 7 puncte.