Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că $a+ib$ este conjugatul numărului complex $z=\frac{1+i}{1-i}$.

5p **2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x-12$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3\left(x^2-4\right)=\log_3(6x-12)$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 100.

5p **5.** Se consideră punctele A, B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}-5\vec{j}$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

5p **6.** Calculaţi lungimea laturii AC a triunghiului ABC, ştiind că $BC=8$, $A=\frac{\pi}{4}$ şi $C=\frac{7\pi}{12}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $A(x)+A(-x)=2A(0)$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinaţi numărul real x pentru care $\det\left(A(x)\right)=0$.

5p **c)** Arătaţi că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relaţia $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+mX+1$, unde m este un număr real.

5p **a)** Calculaţi $f(-1)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m ştiind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-1$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile complexe ale polinomului f.

5p **c)** Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1(1-x)^n e^x dx$.

5p **a)** Calculaţi I_1.

5p **b)** Arătaţi că $I_{n+1}=(n+1)I_n-1$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstraţi că $I_n=n!\left(e-1-\frac{1}{1!}-\ldots-\frac{1}{n!}\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare și de notare

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=i$ $\overline{z}=-i$ $a=0$, $b=-1$	**2p** **1p** **2p**
2.	$x_V=-2$ $y_V=-16$	**2p** **3p**
3.	$x^2-4=6x-12 \Rightarrow x^2-6x+8=0$ $x_1=2$ nu convine și $x_2=4$ verifică ecuația	**2p** **3p**
4.	Numerele divizibile cu 100 din mulțimea numerelor naturale de trei cifre sunt 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 și 900 $\Rightarrow 9$ cazuri favorabile Numărul numerelor naturale de trei cifre este 900 $\Rightarrow 900$ de cazuri posibile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{1}{100}$	**2p** **1p** **2p**
5.	$\overrightarrow{AC}=6\vec{i}-8\vec{j} \Rightarrow AC=10$ Lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AC}$ este egală cu 20	**2p** **3p**
6.	$B=\dfrac{\pi}{6}$ $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B} \Rightarrow AC=4\sqrt{2}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(x)+A(-x)=\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}=2A(0)$, pentru orice număr real x	**2p** **3p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix}=-x^2+2x-1$ $\det(A(x))=0 \Leftrightarrow x=1$	**3p** **2p**
c)	$A(1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; pentru $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avem $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ care este sistem omogen Determinantul sistemului este egal cu $0 \Rightarrow$ sistemul are o infinitate de soluții $\Rightarrow$ există o infinitate de matrice X	**3p** **2p**

2.a)	$f(-1)=(-1)^3+m\cdot(-1)^2+m\cdot(-1)+1=$	**2p**
	$=-1+m-m+1=0$	**3p**
b)	$x_1+x_2+x_3=-m$ şi $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=m^2-2m$	**1p**
	$m^2-2m=-1 \Leftrightarrow m=1$	**2p**
c)	$f=(X+1)\left(X^2+(m-1)X+1\right)$	**2p**
	f are toate rădăcinile reale $\Leftrightarrow (m-1)^2-4\geq 0 \Leftrightarrow m\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\cdot\left(x^2+x+1\right)'=$	**2p**
	$=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\dfrac{1}{2}$	**2p**
	Dreapta de ecuaţie $y=x+\dfrac{1}{2}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**1p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$	**1p**
	$f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$	**2p**
	$f'(x)\leq 0$ pentru orice $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$	**2p**
2.a)	$I_1=\int_0^1(1-x)e^x dx=(1-x)e^x\Big\vert_0^1+\int_0^1 e^x dx=$	**3p**
	$=e-2$	**2p**
b)	$I_{n+1}=\int_0^1(1-x)^{n+1}\left(e^x\right)'dx=(1-x)^{n+1}e^x\Big\vert_0^1-\int_0^1\left((1-x)^{n+1}\right)'e^x dx=$	**2p**
	$=-1+(n+1)\int_0^1(1-x)^n e^x dx=-1+(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
c)	Demonstraţie prin inducţie matematică: $I_1=1!\left(e-1-\dfrac{1}{1!}\right)=e-2$, deci proprietatea este adevărată pentru $n=1$	**1p**
	Presupunem proprietatea adevărată pentru numărul natural nenul k. Avem $I_{k+1}=(k+1)I_k-1=(k+1)k!\left(e-1-\dfrac{1}{1!}-\ldots-\dfrac{1}{k!}\right)-1=(k+1)!\left(e-1-\dfrac{1}{1!}-\ldots-\dfrac{1}{(k+1)!}\right)$, deci proprietatea este adevărată pentru orice număr natural nenul n	**4p**