Test model. Bacalaureat 2013 varianta 3

elaborat de catedra de matematica din C.NC.V.
***propuneri *rezolvari *comentarii**

SUBIECTUL I

5p **1.** Fie z_1, z_2 solutiile complexe ale ecuatiei $z^2 - 2z + 4 = 0$.
Sa se calculeze $|z_1|^2 + |z_2|^2$.

5p **2.** Sa se rezolve ecuatia $2^{\lg x} + 2^{\lg x^2} = 2$.

5p **3.** Sa se determine numarul termenilor rationali ai dezvoltarii $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[2]{3})^{99}$.

5p **4.** Daca M este mijlocul segmentului [AB],
atunci pentru orice punct O din plan, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 20\overrightarrow{M}$.

5p **5.** Se considera paralelogramul ABCD cu diagonalele AC = 8, BD = 6 care fac un unghi de $30°$. Sa se calculeze aria paralelogramului.

5p **6.** Sa se calculeze $\sin 75° - \sin 15°$.

SUBIECTUL II

1. Se considera sistemul $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$, $m \in R$

5p a) Aratati ca valoarea determinantului sistemului este $(m+2)(m-1)^2$.

5p b) Aflati valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat si sa se rezolve in acest caz.

5p c) Aflati valorile lui m pentru care sistemul este compatibil nedeterminat si sa se rezolve in acest caz.

2. Se considera polinomul $f \in C[X]$, $f = (X+i)^4 + (X-i)^4$.

5p a) Sa se calculeze $f(1)$.

5p b) Sa se determine restul impartirii polinomului f la $X^2 + 1$.

5p c) Sa se demonstreze ca f are toate radacinile reale.

SUBIECTUL III

1. Fie functia $f: R \to R$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} & , daca\ x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & , daca\ x = 0 \end{cases}$

5p a) Sa se arate ca $f(x) > 0$, pentru orice $x > 0$.

5p b) Sa se arate ca f este continua in $x_0 = 0$.

5p c) Sa se studieze derivabilitatea functiei f in $x_0 = 0$.

2. Se considera functia $f: [0, \frac{\pi}{2}] \to R$, $f(x) = x^2 \sin x$.

5p a) Sa se arate ca exista numerele reale a, b, c astfel incat functia
$F: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R$, $F(x) = (ax^2 + b)\cos x + cx \sin x$ sa fie o primitiva a functiei f.

5p b) Sa se calculeze $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} f\left(\frac{1}{2x}\right) dx$

5p c) Sa se calculeze aria suprafetei plane cuprinse intre graficul functiei f si graficul functiei $g: [0, \frac{\pi}{2}] \to R$, $g(x) = \pi x - x^2$.

Subiectul I

1. Fie z_1, z_2 solutiile complexe ale ecuatiei $z^2-2z+4=0$. Sa se calculeze $|z_1|^2+|z_2|^2$.

Cum gandim ?	Ce trebuie sa stim ?
Varianta 1 Rezolvand ecuatia obtinem: $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=1-i\sqrt{3}$, de unde rezulta $|z_1|^2+|z_2|^2=4+4=8$. **Varianta 2** Radacinile ecuatiei fiind complexe si conjugate avem: • $z_1z_2=z_1\cdot\overline{z_1}=|z_1|^2$ • $z_1z_2=\overline{z_2}\cdot z_2=|z_2|^2$ Asadar $|z_1|^2+|z_2|^2=2z_1z_2=2\cdot 4=8$.	• rezolvarea ecuatiei de gradul 2 cu discriminantul negativ • definitia modulului unui numar complex • conjugatul unui numar complex • relatiile lui Viete

2. Sa se rezolve ecuatia: $2^{\lg x}+2^{\lg x^2}=2$.

Cum gandim ?	Ce trebuie sa stim ?
Ecuatia se scrie succesiv: $2^{\lg x}+2^{2\lg x}-2=0$, $\left(2^{\lg x}\right)^2+2^{\lg x}-2=0$ de unde rezulta: 1) $2^{\lg x}=1$, $\lg x=0$, $x=1$ 2) $2^{\lg x}=-2$, $x\in\phi$. Asadar **S = { 1 }** .	• proprietatile logaritmilor • proprietatile puterilor

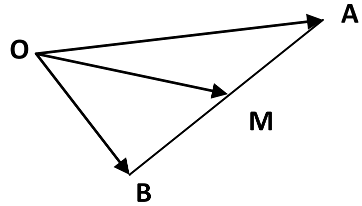
3. Sa se determine numarul termenilor rationali ai dezvoltarii: $\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[2]{3}\right)^{99}$.

Cum gandim ?	Ce trebuie sa stim ?
$T_{k+1}=C_{99}^{k}\cdot 2^{\frac{99-k}{3}}\cdot 3^{\frac{k}{2}}=C_{99}^{k}\cdot 2^{33-\frac{k}{3}}\cdot 3^{\frac{k}{2}}$ Puterile lui 2 si 3 trebuie sa fie intregi, deci k trebuie sa fie multiplu de 6 , $0\le k\le 99$. Intre 0 si 99 exista 17 multipli de 6. Deci numarul termenilor rationali este 17 .	• formula termenului general al unei dezvoltari • conditia ca un numar sa fie rational

4. Daca M este mijlocul segmentului [AB] atunci pentru orice punct O din plan $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$.

Cum gandim ?

Varianta 1



$\Delta AOM:\ \ \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$

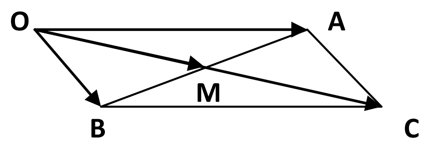
(regula triunghiului)

$\Delta BOM:\ \ \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$.

Adunand cele doua relatii si tinand seama ca $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{0}$ (cei doi vectori sunt opusi) rezulta $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

Varianta 2

Construim paralelogramul AOBC .



Atunci $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}$

Ce trebuie sa stim ?

- adunarea vectorilor folosind regula triunghiului, regula paralelogramului si relatia lui Chasles
- vectori opusi

5. Se considera paralelogramul ABCD cu diagonalele AC = 8 si BD = 6 care fac un unghi de 30°. Sa se calculeze aria paralelogramului.

Cum gandim ?

Varianta 1

Mediana intr-un triunghi il imparte in doua triunghiuri de arii egale. Notand O centrul paralelogramului, obtinem: aria AOB = aria BOC = aria COD = aria AOD.

Deci aria ABCD = 4 aria AOD = $4\cdot\dfrac{4\cdot 3\cdot\sin 30^\circ}{2}=12$.

Varianta 2

Aplicam formula direct: aria ABCD = $\dfrac{AC\cdot BD\cdot\sin 30^\circ}{2}=12$

Ce trebuie sa stim ?

- aria unui triunghi cand se cunosc doua laturi si unghiul dintre ele
- aria unui paralelogram cand se cunosc diagonalele d_1,d_2 si unghiul α dintre ele:

$$A=\frac{d_1\cdot d_2\cdot\sin\alpha}{2}$$

6. Sa se calculeze $\sin 75^\circ-\sin 15^\circ$.

Cum gandim ?

Varianta 1

$$\sin 75^\circ-\sin 15^\circ=2\sin\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}=2\sin 30^\circ\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Varianta 2

$$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

$$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1).$$

Asadar $\sin 75^\circ-\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ce trebuie sa stim ?

- transformarea diferentei in produs
- scrierea unui unghi in functie de alte unghiuri carora li se pot calcula mai usor valorile functiilor trigonometrice

Subiectul II

1. **Se considera sistemul :** $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=1 \end{cases}$, $m \in R$

a) **Sa se arate ca determinantul sistemului are valoarea** $(m+2)(m-1)^2$.

b) **Aflati valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat si rezolvati sistemul in acest caz.**

c) **Aflati valorile lui m pentru care sistemul este compatibil nedeterminat si rezolvati sistemul in acest caz.**

a)

Cum gandim ?

Varianta 1

Folosim regula lui Sarrus sau regula triunghiului si obtinem:

$$\Delta = m^3+1+1-m-m-m = m^3-3m+2 = m^3-m-2m+2 =$$

$$= m(m^2-1)-2(m-1) = (m-1)(m^2+m-2) = (m-1)^2(m+2)$$

Varianta 2

Folosim proprietatile determinantilor:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \underline{\underline{l_1 \to l_1+l_2+l_3}} \begin{vmatrix} m+2 & m+2 & m+2 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} =$$

$$= (m+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \underline{\underline{\substack{c_2-c_1 \\ c_3-c_1}}} (m+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m-1 & 0 \\ 1 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = (m+2)(m-1)^2$$

Ce trebuie sa stim ?

- calculul determinantilor folosind regula lui Sarrus sau regula triunghiului
- calculul determinantilor folosind proprietatile lor
- factorizarea unei expresii

b)

Cum gandim ?

Sistemul este compatibil determinat daca $m \in R - \{-2,1\}$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 0,$$ deoarece primele doua coloane sunt egale

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \Delta = (m-1)^2(m+2)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$ deoarece ultimele doua coloane sunt egale.

Atunci : $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 0$; $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$; $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$. **Solutie unica:** $(0, 1, 0)$

Ce trebuie sa stim ?

- conditia ca un sistem sa fie compatibil determinat
- teorema lui Cramer

c)

<table>
<tr><td>

Cum gandim ?

1) Daca m=1 sistemul este compatibil dublu nedeterminat reducandu-se la ecuatia $x+y+z=1$ cu solutiile $(1-\alpha-\beta,\alpha,\beta)$ $\alpha,\beta\in R$.

2) Daca m=-2 consideram $\Delta_{princ}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=3\neq 0$ $(\Delta=0)$ si

$\Delta_{car}=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$ $(c_2=c_3)$. Notam $z=\alpha$

Sistemul este compatibil simplu nedeterminat $\begin{cases}-2x+y=1-\alpha\\ x-2y=-2-\alpha\end{cases}$, $\alpha\in R$

cu solutiile $(\alpha,\alpha+1,\alpha)$, $\alpha\in R$.

</td><td>

Ce trebuie sa stim ?

- denumirea determinantului principal si aminorilor caracteristici
- conditia de compatibilitate a unui sistem (teorema lui Rouche)
- stabilirea ecuatiilor principale si secundare; a necunoscutelor principale si secundare
- echivalenta sistemelor

</td></tr>
</table>

2. **Se considera polinomul** $f\in C[X]$, $f=(X+i)^4+(X-i)^4$.

a) **Sa se calculeze** $f(1)$

b) **Sa se determine restul impartirii polinomului** f **la** X^2+1

c) **Sa se demonstreze ca polinomul** f **are toate radacinile reale.**

a)

<table>
<tr><td>

Cum gandim ?

Varianta 1

$f(1)=(1+i)^4+(1-i)^4=[(1+i)^2]^2+[(1-i)^2]^2=(2i)^2+(-2i)^2=-8$

Varianta 2

Efectuam calculele :

- $(X+i)^4=X^4+4iX^3-6X^2-4iX+1$
- $(X-i)^4=X^4-4iX^3-6X^2+4iX+1$

Atunci $f=2X^4-12X^2+2$ si $f(1)=-8$.

</td><td>

Ce trebuie sa stim ?

- dezvoltarea binomului (formula lui Newton)
- puterile lui i
- valoarea unui polinom intr-un punct

</td></tr>
</table>

b)

<table>
<tr><td>

Cum gandim ?

Varianta 1

Scriem teorema impartirii cu rest: $f=(X^2+1)q+r$, $grad r<grad(X^2+1)$

$(X+i)^4+(X-i)^4=(X^2+1)q+aX+b$. Luand $x=i$ in functia polinomiala asociata rezulta $(2i)^4=0\cdot q+ai+b$, $ai+b=16$. Deci $r=16$

Varianta 2

Impartim direct polinomul $f=2X^4-12X^2+2$ la X^2+1 si gasim $r=16$.

</td><td>

Ce trebuie sa stim ?

- teorema impartirii cu rest
- impartirea a doua polinoame

</td></tr>
</table>

c)

Cum gandim ?

Varianta 1

Ecuatia atasata polinomului este $(x+i)^4+(x-i)^4=0$ sau $(x+i)^4=-(x-i)^4$. Luand modulul, obtinem: $|x+i|^4=|x-i|^4$ si tinand seama ca modulul este pozitiv avem $|x+i|=|x-i|$. Punand $x=a+bi$, $a,b\in R$ avem $|a+(b+1)i|=|a+(b-1)i|$ sau $a^2+(b+1)^2=a^2+(b-1)^2$ de unde $b=0$ adica $x\in R$.

Varianta 2

Rezolvam ecuatia atasata polinomului $f=2X^4-12X^2+2$, $2x^4-12x^2+2=0$ si obtinem :

1) $x^2=3+2\sqrt{2}$ deci $x_{1,2}=\pm\sqrt{3+2\sqrt{2}}\in R$

2) $x^2=3-2\sqrt{2}$ deci $x_{3,4}=\pm\sqrt{3-2\sqrt{2}}\in R$.

Varianta 3

Consideram functia polinomiala atasata $f(x)=2x^4-12x^2+2,\ f:R\to R$ si determinam numarul de radacini reale folosind sirul lui Rolle:

- calculam radacinile derivatei:

  $f'(x)=8x^3-24x=0,\quad x_1=0, x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$

- determinam semnele valorilor functiei in radacinile derivatei precum si semnele limitelor functiei la $\pm\infty$:

  $f(0)=+2,\quad f(\pm\sqrt{3})=-16,\quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$

- alcatuim sirul lui Rolle :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Deoarece exista patru schimbari de semn, functia are patru zerouri, deci polinomul are patru radacini reale.

Varianta 4

Ecuatia atasata se scrie: $\left(\dfrac{x+i}{x-i}\right)^4=-1=\cos\pi+i\sin\pi$. Folosind formula prin care deducem radacinile de ordin 4 ale unui numar complex scriem succesiv:

$\dfrac{x_k+i}{x_k-i}=\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{4},\quad k\in\{0,1,2,3\}$ si notand $\varphi=\dfrac{\pi+2k\pi}{4}$ avem $x_k=\dfrac{\sin\varphi-i(1+\cos\varphi)}{1-\cos\varphi-i\sin\varphi}=$

$$=\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}-2i\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}-2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}=\frac{2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}-i\cos\frac{\varphi}{2}\right)}{2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}-i\cos\frac{\varphi}{2}\right)}=ctg\frac{\varphi}{2}.$$

Ce trebuie sa stim ?

- modulul unui numar complex
- forma algebrica a unui numar complex
- rezolvarea unei ecuatii bipatrate
- scrierea unui numar complex sub forma trigonometrica
- radacina de ordin n a unui numar complex
- formule trigonometrice pentru sinusul si cosinusul unghiului dublu

Asadar $\quad x_k = ctg\dfrac{\pi + 2k\pi}{8} \in R, \quad k \in \{0,1,2,3\}$.

Obs. Generalizati luand polinomul $\quad f = (X+i)^{100} + (X-i)^{100}$

Subiectul III

1. **Fie functia** $\quad f : R \to R, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}, & daca\ x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & daca\ x = 0 \end{cases}$.

a) **Sa se arate ca** $f(x) > 0$ **pentru orice** $x \geq 0$.

b) **Sa se arate ca** f **este continua in punctul** $x = 0$.

c) **Sa se studieze derivabilitatea functiei in punctul** $x = 0$.

a)

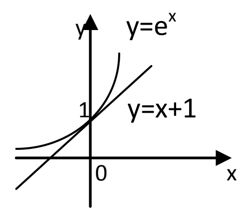
Cum gandim ?

$f(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}, \quad x > 0$. Cum $x(e^x - 1) > 0$ pentru $x > 0$ ramane sa aratam ca $e^x - 1 - x > 0$ sau $e^x > 1 + x, \quad x > 0$ inegalitate adevarata (mai mult sau mai puin cunoscuta !). Obs. Aplicand teorema Lagrange functiei $g(x) = e^x$ pe intervalul $[0, x]$ obtinem $e^x - e^0 = xe^c, \quad 0 < c < x$ deci $e^x > x + 1$.

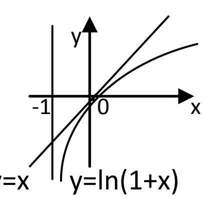
Ce trebuie sa stim ?

- teorema lui Lagrange
- sa retinem inegalitatile:

* $e^x > x + 1$



** $\ln(1 + x) < x$



b)

Cum gandim ?

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x(x+2)} = \frac{1}{2}, \qquad f(0) = \frac{1}{2}$$

Deci f este continua in $x_0 = 0$.

Ce trebuie sa stim ?

- cazurile de nedeterminare
- regula lui l'Hospital
- conditia de continuitate a unei functii intr-un punct

c)

Cum gandim ?	Ce trebuie sa stim ?
Varianta 1 Calculam derivata in punctul $x_0=0$ folosind definitia : $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}-\frac{1}{2}\right)=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{2e^x-xe^x-x-2}{2x^3}=1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-xe^x-x-2}{2x^3}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=}}$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-xe^x-1}{6x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{xe^x}{12x}\right)=-\frac{1}{12}$ Deci functia este derivabila in $x_0=0$. **Varianta 2** Calculam derivata in punctele $x\neq 0$ si folosim consecinta teoremei Lagrange: Pentru $x\neq 0$ avem $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{x^2e^x-(e^x-1)^2}{x^2(e^x-1)^2}$. Atunci $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{(e^x-1)^2}\cdot\frac{x^2e^x-(e^x-1)^2}{x^4}=$ $=1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2e^x-(e^x-1)^2}{x^4}$ si aplicand de patru ori regula lui l'Hospital obtinem $f'(0)=-\frac{1}{12}$. Am tinut seama ca f este si continua in $x_0=0$.	• definitia derivatei intr-un punct • definitia derivabilitatii unei functii intr-un punct • limita remarcabila $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ • regula lui l'Hospital • formule de derivare • consecinta teoremei lui Lagrange

2. **Se considera functia** $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to R,\quad f(x)=x^2\sin x$.

a) **Sa se arate ca exista numerele reale** a,b,c **astfel incat functia** $F:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to R,$ $F(x)=(ax^2+b)\cos x+cx\sin x$ **sa fie o primitiva a functiei** f.

b) **Sa se calculeze** $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} f\left(\frac{1}{2x}\right)dx$.

c) **Sa se calculeze aria suprafetei plane cuprinse intre graficul functiei** f **si graficul functiei** $g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to R,\quad g(x)=\pi x-x^2$.

a)

Cum gandim ?	**Ce trebuie sa stim ?**
Varianta 1 Avem $F'(x)=2ax\cos x-(ax^2+b)\sin x+c\sin x+cx\cos x=$ $=(2ax+cx)\cos x+(c-ax^2+b)\sin x$. Identificand coeficientii in relatia $F'(x)=f(x)$ obtinem: $a=-1,\quad b=c=-2$. **Varianta 2** Avem $\int x^2\sin xdx=-\int x^2(\cos x)'dx=-\left(x^2\cos x-\int 2x\cos xdx\right)=$ $=-x^2\cos x+2\int x(\sin x)'dx=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$ Luam constanta zero (trebuia o primitiva) si obtinem $a=-1,\quad b=c=-2$.	• formule de derivare • identificarea coeficientilor • formula de integrare prin parti

b)

Cum gandim ?	**Ce trebuie sa stim ?**
Varianta 1 Folosim prima schimbare de variabila. Notam $t=\frac{1}{2x},\quad dt=t'dt=-\frac{1}{2x^2}dx,\quad x=\frac{1}{\pi}\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$ $x=\frac{2}{\pi}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$. Asadar $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} f\left(\frac{1}{2x}\right)dx=\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{4x^2}\cdot\sin\frac{1}{2x}dx=$ $=-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\sin\frac{1}{2x}\cdot\left(-\frac{1}{2x^2}\right)dx=-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\sin tdt=\frac{1}{2}\cos t\Big\vert_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ **Varianta 2** Folosim a doua schimbare de variabila. Notam $x=\frac{1}{2t},\quad dx=x'dt=-\frac{1}{2t^2}dt,\quad x=\frac{1}{\pi}\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$ $x=\frac{2}{\pi}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$. Asadar $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} f\left(\frac{1}{2x}\right)dx=\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{4x^2}\cdot\sin\frac{1}{2x}dx=$	• prima schimbare de variabila in integrala definita • formulele de integrare a functiilor trigonometrice • a doua schimbare de variabia

$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} t^2 \cdot \frac{1}{2t^2} \sin t dt = -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin t dt = \frac{1}{2}\cos t \Big\vert_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$	

c)

Cum gandim ?	Ce trebuie sa stim ?
Avem • $\sin x \le 1 \Rightarrow x^2 \sin x \le x^2, \quad (1)$ • $x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x \le \pi \Rightarrow x \le \pi - x \Rightarrow x^2 \le \pi x - x^2, \quad (2)$ Din (1) si (2) rezulta $x^2 \sin x \le \pi x - x^2$ adica $f(x) \le g(x), \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ Atunci $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (g(x) - f(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx =$ $= \left(\pi \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}} - F(x) \Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{12} + 2 - \pi$.	• inegalitatea $-1 \le \sin x \le 1, \forall x \in R$ • compararea functiilor • calculul ariei suprafetei plane cuprinse intre graficele a doua functii continue