Test model. Bacalaureat 2013 varianta 2

elaborat de catedra de matematica din C.NC.V.

***propuneri *rezolvari *comentarii**

SUBIECTUL I

5p 1. Stabiliti care din numerele urmatoare este mai mare: $\sqrt[3]{4}$ sau $\sqrt[4]{5}$.

5p 2. Se considera functiile $f, g: R \to R$, $f(x) = ax + 2$ si $g(x) = 2x + a$.
Sa se determine *a* astfel incat $f \ o \ g = g \ o \ f$.

5p 3. Sa se determine $n \in N$ astfel incat $C_n^3 \geq C_n^5$.

5p 4. Sa se determine probabilitatea ca, alegand un numar din multimea numerelor de 3 cifre,
acesta sa fie divizibil cu 25.

5p 5. In sistemul cartezian de coordonate xOy se considera punctele $A(3,0), B(0,-4)$.
Sa se calculeze distanta de la punctul *O* la dreapta *AB.*

5p 6. Stiind ca $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ si ca $tg\ \alpha + ctg\ \alpha = 2$, sa se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II

1. Se considera matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(R)$.

5p a) Sa se arate ca $\det A^3 = (\det A)^3$.

5p b) Sa se demonstreze ca daca matricea $X \in M_2(R)$ verifica relatia *AX = XA*,
atunci exista $x, y \in R$ astfel incat $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

5p c) Sa se rezolve ecuatia $X^2 = A$ in $M_2(R)$.

2. Pe multimea *R* se defineste legea de compozitie $x * y = x + y + xy$.

5p a) Sa se arate ca $(x * y) * z = x * (y * z) = (x + 1)(y + 1)(z + 1) - 1, \forall x, y, z \in R$.

5p b) Fie functia $f: R \to R$, $f(x) = x + 1$.
Sa se verifice relatia $f(x * y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in R$.

5p c) Sa se calculeze $1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \ldots * \frac{1}{2013}$.

SUBIECTUL III

1. Se considera functia $f: R \to R$, $f(x) = x^3 + 3x + 3arctg\ x$.

5p a) Sa se arate ca f este strict crescatoare pe R.

5p b) Sa se arate ca f este bijectiva.

5p c) Sa se calculeze $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{x^3}$.

2. Se considera functia $f_n: [0,\infty) \to R$, $f_n(x) = \ln(1+x^n)$ si sirul $(I_n)_{n\in N}$,

$I_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{x^n+1} dx$.

5p a) Sa se calculeze $f_n'(x)$.

5p b) Sa se arate ca $I_n = \ln 2 - \int_0^1 f_n(x)dx$.

5p c) Sa se calculeze $\lim_{n\to\infty} I_n$.

Comentarii

**abordari *solutii *observatii.*

Prof. A.V. Mihai
Prof. A. Demsorean

Redactor:Bumbu Andrei

Subiectul I

1. Stabiliti care din numerele urmatoare este mai mare: $\sqrt{4}$ sau $\sqrt{5}$.

Cum gandim?	**Ce trebuie sa stiu?**
Aducem radicalii la acelasi ordin: $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3\cdot 4]{4^4} = \sqrt[12]{256};\ \sqrt[4]{5} = \sqrt[4\cdot 3]{5^3} = \sqrt[12]{125}$ Asadar,$\sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{5}$	• formule de aducere a radicalilor la acelasi ordin:$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\cdot x]{a^x}$ • compararea radicalilor

2.Se considera functiilef ,g : R⟶ R, f(x) =ax + 2 si g(x) = 2 x+a . Sa se determine a astfel incat f o g=g o f .

Cum gandim?	**Ce trebuie sa stiu?**
$(fog)(x) = f(g(x)) = a(2x + a) + 2 = 2ax + a^2 + 2$ $(gof)(x) = g(f(x)) = 2(ax + 2) + a = 2ax + a + 4$ Asadar,2ax + a^2 + 2 = 2ax + a + 4 ,$\forall x \epsilon$R de unde rezulta a^2-a-2=0 cu solutiile $a_1 = -1, a_2 = 2$.Obtinem: $f(x) = -x + 2, g(x) = 2x - 1$ sau $f(x) = g(x) = 2x + 2$	• compunerea a doua functii • egalitatea a doua functii • rezolvarea ecuatiei de gradul 2

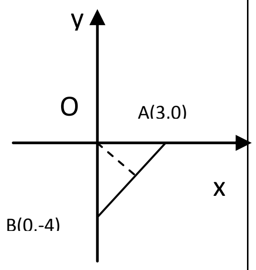
3. Sa se determine n∈N astfel incat $C_n^3 \geq C_n^5$.

Cum gandim?	Ce trebuie sa stiu?
Punem conditia de existent $n \geq 5$ Avem:$\frac{n!}{3!(n-3)!} \geq \frac{n!}{5!(n-5)!} =>$ (n-4)(n-3)≤ 20 $=> n^2 - 7n - 8 \leq 0$ $=> n\epsilon[-1,8]. Cum\ n\epsilon N\ si\ n \geq 5 => n\epsilon\{5,6,7,8\}$	• formula pentru C_n^k • conditiile de existent pentruC_n^k • rezolvarea inecuatiei de gradul II

4. Sa se determine probabilitatea ca, alegand un numar din multimea numerelor de 3 cifre,acesta sa fie divizibil cu 25.

Cum gandim?	Ce trebuie sa stiu?
Sunt 900 de numere de trei cifre.In fiecare grupa de 100 de numere,in ordine crescatoare,exista patru care se divid prin 25. Asadar ,obtinem 36 de cazuri favorabile,deci P=$\frac{36}{900} = \frac{1}{25}$ =0,04	• calculul numarului de cazuri posibile si favorabile • formulele de calcul a unei probabilitati

5. In sistemul cartezian de coordonate xOy se considera punctele A(3,0), B(0,-4). Sa se calculeze distanta de la punctul O la dreapta AB.

Cum gandim?	Ce trebuie sa stiu?
<u>Varianta 1</u> Distanta de la O la dreapta AB este inaltimea ΔOAB coborata din O pe AB. Din teorema lui Pitagora se obtine AB=5 Exprimand aria ΔOAB in doua moduri obtinem: $\frac{AB \cdot h}{2} = \frac{OA \cdot OB}{2} => h = \frac{12}{5}$.  <u>Varianta 2</u> Scriem ecuatia dreptei AB: 4x-3y-12=0 Atunci distanta de la O(0,0) la AB este $d = \frac{\lvert 4\cdot 0 - 3\cdot 0 - 12\rvert}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{12}{5}$	• formula distantei dintre 2 puncte,teorema lui Pitagora • aria unui triunghi dreptunghic • formula distantei de la un punct la o dreapta

6. Stiind ca $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ si ca tg α + ctg α = 2, sa se calculeze sin 2α .

Cum gandim?	**Ce trebuie sa stiu?**
<u>Varianta 1</u> $tg\alpha + ctg\alpha = 2 => tg\alpha + \frac{1}{tg\alpha} = 2$ $=> (tg\alpha - 1)^2 = 0 => tg\alpha = 1 => \alpha = \frac{\pi}{4} \epsilon \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$ Atunci $\sin 2\alpha = sin2 \cdot \frac{\pi}{4} = sin\frac{\pi}{2} = 1$ <u>Varianta 2</u> Daca cunoastem tgα=1,folosim formula $\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$ si obtinem sin2α=1. <u>Varianta 3</u> Relatia se scrie succesiv: $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} + \frac{cos\alpha}{sin\alpha} = 2$ sau $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha =>$ $=> sin2\alpha = 1$	• valorile functiilor trigonometrice a unor unghiuri uzuale • formula de legatura dintre tgα si $ctg\alpha$ • sinusul unui arc in functie de tangenta jumatatii de arc • formula fundamentala a trigonometriei • sinusul arcului dublu

Subiectul II

1. Se considera matricea A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_2$ (R).

a) Sa se arate ca detA^3 = (det A) ^{3}.

Cum gandim?	Ce trebuie sa stiu?
Varianta 1 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ =$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$; A^3=$A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}$ det A=4 si det $A^3 = 64$,de unde ecuatia. Varianta 2 Se poate folosi formula $\det A^n = (\det A)^n$, $n \epsilon N$ Pentru n=3 se obtine relatia data.	• inmultirea matricelor • calculul determinatilor • proprietatea: det(AB)=detA·detB; $\forall A, B \epsilon M_2(C)$(generalizare)

b) Sa se demonstreze ca daca matricea X∈M_2(R) verifica relatia AX = XA, atunci exista ,x,y∈R astfel incat X=$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

Cum gandim?	Ce trebuie sa stiu?
Fie x=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;a,b,c,d$\epsilon$R AX=XA=>$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $=> \begin{pmatrix} a & b \\ 4c & 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 4b \\ c & 4d \end{pmatrix} => \begin{cases} b = 4b \\ 4c = c \end{cases} => \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$. Asadar,X are forma X=$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$cu x=a ϵ R si y=4d ϵ R	• inmultirea matricelor • egalitatea matricelor

c) Sa se rezolve ecuatia X^2=A inM_2(R).

Cum gandim?	Ce trebuie sa stiu?
Fie X=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;a,b,c,d$\epsilon R$ Varianta 1 Avem:X^2=A=>$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$=> $=> \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ ab + bd = 0 => b(a+d) = 0 \\ ca + dc = 0 => c(a+d) = 0 \\ d^2 + bc = 1 \end{cases}$	• egalitatea matricelor • rezolvarea sistemelor • identificarea solutiilor care convin cerintei.

Daca a+d=0,adica d=-a,obtinem din prima si ultima ecuatie 1=4(fals) Deci b=c=0,a^2=1=>a=$\pm$1 si d^2=4=>d=$\pm$2 Obtinem astfel solutiile: $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ Varianta 2 Daca $X^2 = A$,inmultim aceasta relatie la stanga si la dreapta cu X: $X^3 = XA \; si \; X^3 = AX$ si obtinem XA=AX. Rezulta ca X are forma $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} x, y \epsilon R$ conform punctului b) Asadar,$X^2 = A => \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ x^2=1 si y^2=4.Obtinem 4 solutii.	• operatia de compunere la “stanga si la dreapta”

2.. Pe multimea R se defineste legea de compozitie x∗ y=x+y+xy.

a) Sa se arate ca (x∗y)∗z = x∗(y∗z) =(x+ 1)(y+ 1)(z+ 1) − 1, ∀ x,y , z∈R.

Cum gandim?	**Ce trebuie sa stiu?**
• (x∗y)+z=x∗y+z+(x∗y)z=x+y+xy+z+zx+zy+xyz (1) • x∗ $(y * z)$=x+y∗z+x(y∗z)=x+y+z+yz+xy+xz+xyz (2) Efectuand calculele pentru expresia (x+1)(y+1)(z+1)-1 si tinand seama de (1) si (2) obtinem cerinta.	• efectuarea operatiei de compunere pentru o lege de compozitie data. • proprietatile unei legi de compozitie.

b) Fie functia f:R→R , f(x) = x+ 1. Sa se verifice relatia f(x∗y) = f(x) · f(y), ∀ x, y∈R .

Cum gandim?	**Ce trebuie sa stiu?**
$f(x* y)=x*y+1=x+y+xy+1=(x+1)(y+1)$ $f(x)\cdot f(y)=(x+1)(y+1)$	• valoarea unei functii. • factorizarea unei expresii

c) Sa se calculeze $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\ldots*\frac{1}{2013}$.

Cum gandim?	**Ce trebuie sa stiu?**
Varianta 1 Tinand seama de punctual a) se poate deduce prin inductie ca $x_1 * x_2 * x_3 * \ldots * x_n=(x_1+1)\cdot(x_2+1)\cdot\ldots\cdot(x_n+1)-1$ Asadar: $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\ldots*\frac{1}{2013}=(1+1)\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2013}+1\right)-1=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2014}{2013}-1=2014-1=2013$ Varianta 2 Tinand seama de punctual b) se poate deduce prin inductie ca, $f(x_1 * x_2 * x_3 * \ldots * x_n)=(x_1+1)\cdot(x_2+1)\cdot\ldots\cdot(x_n+1)$ Functia f fiind bijectiva admite inversa $f^{-1}(x)=x-1$. Deci: $f(1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\ldots*\frac{1}{2013})=(1+1)\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{2013})=2014.$ Atunci, $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\ldots*\frac{1}{2013}=f^{-1}(2014)=2014-1=2013.$	• metoda inductiei matematice • stabilirea bijectivitatii unei functii • calculul inverse unei functii

Subiectul III

1. Se considera functiaf :R $\rightarrow$R , f(x) =x^3 + 3x + 3arctg x .

a) Sa se arate ca f este strict crescatoare pe R.

Cum gandim?	**Ce trebuie sa stiu?**
Varianta 1 Derivand functia,obtinem: f'(x)=$3x^2$+3+$\frac{3}{x^2+1}$=3$\cdot\frac{(x^2+1)^2+1}{x^2+1}$>0 De unde rezulta ca f este strict crescatoare pe R. Varianta 2 Functiile x$\rightarrow x^3$,x$\rightarrow$3x,si x$\rightarrow$3arctgx sunt strict crescatoare pe R. Deci si f este de aceeasi natura.	• formula de derivare pentru functiile elementare si compuse • rolul derivatei intai (monotonie,puncte de extreme) • suma a doua functii crescatoare este tot crescatoare • suma a doua functii descrescatoare este tot descrescatoare

b) Sa se arate ca f este bijectiva.

Cum gandim?	Ce trebuie sa stiu?
f fiind strict crerscatoare este si injectiva. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$=-∞-3$\cdot\frac{\pi}{2}$=-∞ $\lim_{x\to\infty} f(x)$=∞+3$\cdot\frac{\pi}{2}$=∞ de unde rezulta f(R)=R Cum f este si continua=> f surjectiva. Concluzie: f bijectiva.	• O functie strict monotona este injectiva • O functie continua pentru care imaginea domeniului este codomeniul este surjectiva. • Limite remarcabile: • $\lim_{x\to\infty} arctgx$=$\frac{\pi}{2}$ $\lim_{x\to-\infty} arctgx$=-$\frac{\pi}{2}$

c) Sa se calculeze $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}$.

Cum gandim?	Ce trebuie sa stiu?
Varianta 1.Folosim regula lui l'Hopital: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}$=$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3+3x+3arctgx)'}{(x^3)'}$= =$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{3}\cdot\frac{x^4+2x^2+2}{x^2(x^2+1)}$=1(vezi a)) Varianta 2 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}$=$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x^2}+3\cdot\frac{arctgx}{x^3})$=1, deoarece $\lim_{x\to\infty} arctgx$=$\frac{\pi}{2}$	• regula lui l',Hopital • limitele: $\lim_{x\to+\infty} arctgx=\frac{\pi}{2}$ $\lim_{x\to-\infty} arctgx=-\frac{\pi}{2}$ • derivarea functiilor

2. Se considera functia f_n:[0, ∞) →R, f_n(x) = ln(1 + x) si sirul $(I_n)_{n\epsilon N}$. $I_n = \int_0^1 \frac{n\cdot x^n}{1+x^n} dx$.

a) Sa se calculeze f_n'(x).

Cum gandim?	**Ce trebuie sa stiu?**
$f_n'(x)=\frac{(1+x^n)'}{1+x^n}=\frac{n\cdot x^{n-1}}{1+x^n}$	• formule de derivate

b) Sa se arate ca $I_n = \ln 2 - \int_0^1 f_n(x)dx$.

Cum gandim?	**Ce trebuie sa stiu?**
$I_n = \int_0^1 \frac{n\cdot x^n}{1+x^n}dx = \int_0^1 x\frac{n\cdot x^{n-1}}{1+x^n}dx =$ $= \int_0^1 x\cdot(\ln(1+x^n))dx=$ $=x\cdot\ln(1+x^n)\Big\|_0^1 - \int_0^1 \ln(1+x^n)dx =$ $= \ln 2 - \int_0^1 f_n(x)dx.$	• formula de integrare prin parti • formula Leibniz-Newton

c) Sa se calculeze $\lim_{n\to\infty} I_n$.

Cum gandim?

Folosind inegalitatea

$\ln(1+t) \leq t, \forall t \epsilon (-1, \infty)$ avem:

$0 < \int_0^1 f_n\,(x)dx = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx <$

$$< \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Din teorema “clestelui” deducem ca:

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^1 f_n(x) = 0$$

Asadar, $\lim_{x\to\infty} I_n = \ln 2$

Ce trebuie sa stiu?

- inegalitatea cunoscuta(cat de cat!) $\ln(1+t) \leq t, \forall t \epsilon (-1, \infty)$
- teorema “clestelui”