<u>Test model . Bacalaureat 2013</u>

elaborat de catedra de matematica din C.NC.V.
***propuneri *rezolvari *comentarii**

SUBIECTUL I

5p 1. Fie z una dintre radacinile ecuatiei $x^2 - x + 1 = 0$. Sa se arate ca $z^3 = -1$.

5p 2. Sa se rezolve ecuatia $\log_2{}^2 x^2 + 2\log_2 x - 2 = 0$.

5p 3. Sa se determine termenul din mijloc al dezvoltarii $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$.

5p 4. Sa se calculeze $\sin\left(\frac{\circledR}{2} - \arcsin\frac{1}{3}\right)$.

5p 5. Fie $ABCD$ un patrat de latura 1. Sa se calculeze lungimea vectorului $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$.

5p 6. In sistemul cartezian de coordonate xOy se considera punctele $A(1,2), B(-1,0), C(-2,a)$. Sa se determine $a \in R$ astfel incat punctele sa fie coliniare.

SUBIECTUL II

1. Se considera multimea $G \subset M_2(Q)$, $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 10b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in Q, \quad a^2 - 10b^2 = 1 \right\}$.

5p a) Sa se verifice ca $A = \begin{pmatrix} 19 & 60 \\ 6 & 19 \end{pmatrix} \in G$.

5p b) Sa se arate ca $X \cdot Y \in G, \quad \forall\, X, Y \in G$

5p c) Sa se arate ca orice matrice din G este inversabila si sa se determine inversa sa.

2. Se considera $a, b, c \in Q$ si polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$.

5p a) Sa se calculeze $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$, unde x_1, x_2, x_3 sunt radacinile complexe ale polinomului f.

5p b) Sa se determine a, b, c astfel incat polinomul f sa aiba radacinile $x_1 = x_2 = 1, x_3 = -1$.

5p c) Sa se arate ca daca f are radacina $\sqrt{2}$, atunci f are o radacina rationala.

SUBIECTUL III

1. Se considera functia $f : R \to R, \quad f(x) = x - \ln(e^x + 1)$.

5p a) Sa se arate ca f se scrie $f(x) = \ln\frac{e^x}{1 + e^x}$.

5p b) Sa se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \cdot f(x)$.

5p c) Sa se determine asimptotele graficului functiei f.

2. Se considera sirul $(I_n)_{n \in N}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x + 1} dx, \quad n \in N$.

5p a) Sa se calculeze $I_0 + I_1 + I_2$.

5p b) Sa se demonstreze ca sirul este convergent.

5p c) Sa se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

Comentarii

*abordari *solutii *observatii

Prof. A.V. Mihai

Prof. A. Demsorean

Subiectul I

1. Fie α una dintre radacinile ecuatiei $x^2-x+1=0$. Sa se arate ca $\alpha^3=-1$.

Cum gandim ?	Ce trebuie sa stim ?
Varianta 1. Daca α este radacina a ecuatiei $x^2-x+1=0$ atunci α verifica $\alpha^2-\alpha+1=0$. Inmultind aceasta relatie cu $\alpha+1$ obtinem $\alpha^3=-1$. **Varianta 2.** Inmultind cu α avem $\alpha^3-\alpha^2+\alpha=0$, $\alpha^3=\alpha^2-\alpha=-1$. **Varianta 3.** Rezolvand ecuatia obtinem $x_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Luand $\alpha=x_1$ avem $\alpha^3=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{1+3i\sqrt{3}-9-3i\sqrt{3}}{8}=-1$.	• conditia ca un numar sa fie radacina unei ecuatii • formule de calcul prescurtat $(a\pm b)^3$, $a3(putere)\pm b^3$ • puterile numarului i

2. Sa se rezolve ecuatia $\log_2^2 x^2+2\log_2 x-2=0$.

Cum gandim ?	Ce trebuie sa stim ?
Varianta 1. Observam ca $\log_2^2 x^2=\left(\log_2 x^2\right)^2=(2\log_2 x)^2=4\log_2^2 x$. Obtinem ecuatia de gradul 2 $4\log_2^2 x+2\log_2 x-2=0$, $x>0$ cu necunoscuta $\log_2 x$ care are solutiile 1) $\log_2 x=-1$ $\Rightarrow$ $x=\frac{1}{2}$ si 2) $\log_2 x=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $x=\sqrt{2}$. Asadar $S=\left\{\frac{1}{2},\sqrt{2}\right\}$. **Varianta 2.** Folosind proprietatile logaritmilor putem scrie $\log_2^2 x^2+\log_2 x^2-2=0$, $x>0$. Aceasta este o ecuatie de gradul 2 in necunoscuta $\log_2 x^2$ cu solutiile $\log_2 x^2=1\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x_1=\sqrt{2}>0$ si $\log_2 x^2=-2\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x_2=\frac{1}{2}>0$. Asadar $S=\left\{\frac{1}{2},\sqrt{2}\right\}$.	• conditiile de existenta a logaritmilor • definitia logaritmului unui numar pozitiv • proprietatile logaritmilor • rezolvarea ecuatiei de gradul 2

3. **Sa se determine termenul din mijloc al dezvoltarii** $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$.

Cum gandim ?	Ce trebuie sa stim ?
Varianta 1. Dezvoltam binomul $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10} = C_{10}^0x^{10}+C_{10}^1x^9\frac{1}{x}+$ $+C_{10}^2x^8\frac{1}{x^2}+C_{10}^3x^7\frac{1}{x^3}+C_{10}^4x^6\frac{1}{x^4}+C_{10}^5x^5\frac{1}{x^5}+\ldots+C_{10}^{10}\frac{1}{x^{10}}$. Asadar termenul din mijloc este $T_6=C_{10}^5x^5\frac{1}{x^5}=C_{10}^5=252$. **Varianta 2.** Dezvoltarea contine 11 termeni, deci termenul din mijloc are rangul 6. Pentru dezvoltarea $(a+b)^n$ termenul general este $T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$, unde $0\le k\le n$. Asadar $T_6=C_{10}^5x^5\frac{1}{x^5}=C_{10}^5=252$.	• formula de dezvoltare a binomului lui Newton • termenul general, de rang k+1 • numarul de termeni ai unei dezvoltari • formule pentru numerele P_k, A_n^k, C_n^k

4. **Sa se calculeze** $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{3}\right)$.

Cum gandim ?	Ce trebuie sa stim ?
Varianta 1. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{3}\right)=\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=$ $=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **Varianta 2.** Notam $a=\arcsin\frac{1}{3}\Rightarrow\sin a=\frac{1}{3}$ si $\cos a=\sqrt{1-\sin^2 a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Atunci $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos a=\frac{2\sqrt{2}}{3}$	• formula fundamentala a trigongonometriei: $\sin^2 x+\cos^2 x=1, \quad \forall x\in R$ • formula: $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right), \quad \forall x\in R$ • formula: $\sin(\arcsin x)=x, \quad \forall x\in R$

5. **Fie** $ABCD$ **un patrat de latura 1. Sa se calculeze lungimea vectorului** $\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{AD}$.

Cum gandim ?	Ce trebuie sa stim ?
Folosind regula paralelogramului avem: $\vec{AB}+\vec{AD}=2\vec{AC}$. Asadar $\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{AD}=2\vec{AC}$ Atunci $\lvert\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{AD}\rvert$ = $2\lvert\vec{AC}\rvert=2\sqrt{2}$, deoarece $\lvert\vec{AC}\rvert=AC=\sqrt{2}$	_ adunarea vectorilor (regula paralelogramului si a triunghiului) _ lungimea (norma) unui verctor _ teorema lui Pitagora

6. **In sistemul cartezian de coordonate xOy se considera punctele $A(1,2),\ B(-1,0),\ C(-2,a)$. Sa se determine $a\in R$ astfel incat punctele sa fie coliniare.**

Cum gandim ?	Ce trebuie sa stim ?
Varianta 1. Scriem ecuatia dreptei $AB:\quad x-y+1=0$. Din conditia $c\in AB$ rezulta $-2-a+1=0$ adica $a=-1$. **Varianta 2.** Punctele A,B,C sunt coliniare daca dreptele AB si AC au aceeasi panta: $m_{AB}=m_{AC}$, adica $\dfrac{0-2}{-1-1}=\dfrac{a-2}{-2-1}$, deci $a=-1$. **Varianta 3.** Determinantul continand coordonatele celor trei puncte pe primele doua coloane si 1 pe ultimacoloana este nul : $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ =2 & a & 1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow -4a-4=0 \Rightarrow a=-1.$	• panta unei drepte care trece prin doua puncte • ecuatia unei drepte care trece prin doua puncte • conditia ca un punct sa apartina unei drepte • alte conditii de coliniaritate • calculul determinantilor de ordin trei

Subiectul II

1. **Se considera multimea** $G\subset M_2(Q)$, $G=\left\{\begin{pmatrix}a & 10b\\ b & a\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in Q,\quad a^2-10b^2=1\right\}$.

a) **Sa se verifice ca** $A=\begin{pmatrix}19 & 60\\ 6 & 19\end{pmatrix}\in G$.

b) **Sa se arate ca** $X\cdot Y\in G,\quad \forall\ X,Y\in G$

c) **Sa se arate ca orice matrice din G este inversabila si sa se determine inversa sa.**

a)

Cum gandim ?	Ce trebuie sa stim ?
Scriem $A=\begin{pmatrix}19 & 10\cdot 6\\ 6 & 19\end{pmatrix}$ si observam ca $19^2-10\cdot 6^2=361-360=1$, deci $A\in G$.	_ care este forma unei matrice care apartine lui G _ conditia pe care trebuie sa o indeplineasca elementele lui G.

b)

Cum gandim ?	Ce trebuie sa stim ?
Fie $X,Y\in G$. Atunci: $X=\begin{pmatrix}a & 10b\\ b & a\end{pmatrix},\quad a,b\in Q,\quad a^2-10b^2=1$ si $Y=\begin{pmatrix}c & 10d\\ d & c\end{pmatrix},\quad c,d\in Q,\quad c^2-10d^2=1$ Avem $X\cdot Y=\begin{pmatrix}ac+10bd & 10(ad+bc)\\ ad+bc & ac+10bd\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u & 10v\\ v & u\end{pmatrix}$, unde $u=ac+10bd\in Q,\quad v=ad+bc\in Q$. Avem si $u^2-10v^2=$ $=(ac+10bd)^2-10(ad+bc)^2=(a^2-10b^2)(c^2-10d^2)=1\cdot 1=1.$ Asadar $X\cdot Y\in G$.	_ care este forma unei matrice care apartine lui G _ produsul a doua matrice _ factorizarea unei expresii

c)

Cum gandim ?	Ce trebuie sa stim ?
Varianta 1. $\det A = a^2 - 10b^2 = 1 \neq 0$, deci matricea este inversabila. $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$, A^* matricea adjuncta a matricei A. $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & -10b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 10(-b) \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a^2 - 10(-b)^2 = 1$. Asadar $A^{-1} \in G$. **Varianta 2.**	• conditia ca o matrice sa fie inversabila • expresia pentru A^{-1} si calculul lui A^*

2. **Se considera $a, b, c \in Q$ si polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$.**

a) Sa se calculeze $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$, unde x_1, x_2, x_3 sunt radacinile complexe ale lui f.

b) Sa se determine a, b, c astfel incat polinomul f sa aiba radacinile $x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = -1$.

c) Sa se arate ca daca f are radacina $\sqrt{2}$, atunci f are o radacina rationala.

Cum gandim ?	Ce trebuie sa stim ?
Varianta 1. Scriem relatiile lui Viete: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b \\ x_1x_2x_3 = -c \end{cases}$ Efectuand produsul si tinand seama de aceste relatii obtinem : $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) = 1 - (x_1 + x_2 + x_3) + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 -$ $- x_1x_2x_3 = 1 + a + b + c.$ **Varianta 2.** Folosim formula de descompunere a unui polinom : $f = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ si obtinem: $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) = f(1) = 1 + a + b + c$ **Varianta 3.** Scriem polinomul in nedeterminata Y obtinut notand $Y = 1 - X$ sau $X = 1 - Y$. Obtinem $-Y^3 + (a+3)Y^2 - (2a+b+3)Y + a + b + c + 1$ cu radacinile y_1, y_2, y_3. Deci $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) = y_1y_2y_3 =$ $= a + b + c + 1.$	• Relatiile lui Viete • Descompunerea polinomului in produs de factori ireductibili • Valoarea polinomului intr-un punct

b)

Cum gandim ?	Ce trebuie sa stim ?
Varianta 1. Scriem relatiile lui Viete : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b \\ x_1x_2x_3 = -c \end{cases}$	• Relatiile lui Viete

si inlocuim $x_1 = x_2 = 1, x_3 = -1$. Obtinem: $a = -1, b = -1, c = 1$. **Varianta 2.** Daca $x_1 = x_2 = 1, x_3 = -1$, atunci polinomul f se divide cu polinomul $g = (x^2 - 1)(x + 1) = X^3 - X^2 - X + 1$ prin identificare obtinem $a = -1, b = -1, c = 1$. **Varianta 3.** O radacina fiind dubla si cealalta simpla se pun conditiile : $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$ adica $\begin{cases} a + b + c + 1 = 0 \\ 2a + b + 3 = 0 \\ a - b + c - 1 = 0 \end{cases}$. Rezolvand sistemul gasim $a = -1, b = -1, c = 1$.	• criterii de divizibilitate • impartirea polinoamelor • conditia ca un polinom sa admita radacini multiple

c)

Cum gandim ?	**Ce trebuie sa stim ?**
Varianta 1. Daca polinomul admite radacina rationala $x_1 = \sqrt{2}$ atunci admite ca radacina si conjugata acesteia $x_2 = -\sqrt{2}$. Din prima relatie Viete $x_1 + x_2 + x_3 = -a$ rezulta $x_3 = -a \in Q$.	• radacinile polinoamelor cu coeficienti rationali
Varianta 2. Polinomul se divide cu $x^2 - 2$. Efectuand impartirea obtinem catul $X + a$, deci $x_3 = -a \in Q$.	• criterii de divizibilitate • impartirea polinoamelor • radacinile polinoamelor cu coeficienti rationali
Varianta 3. Deoarece $x_1 = \sqrt{2}$ este radacina lui f rezulta $f(\sqrt{2}) = 0$ adica $(2a + c) + (b + c)\sqrt{2} = 0$. Cum $a, b.c \in Q \Rightarrow 2a + c = b + 2 = 0$ Deci $b = -2, c = -2a$. Astfel $f = X^3 + aX^2 - 2X - 2a$ cu radacina rationala $x_3 = -a$.	• ce inseamna ca un numar este radacina unui polinom

Subiectul III

1. Se considera functia $f : R \to R, \quad f(x) = x - \ln(e^x + 1)$.

a) Sa se arate ca f **se scrie** $f(x) = \ln \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.

b) Sa se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} x^2 \cdot f(x)$.

c) Sa se determine asimptotele graficului functiei f.

a)

Cum gandim ?	Ce trebuie sa stim ?
$f(x)=\ln\frac{e^x}{e^x+1}=\ln e^x-\ln(e^x+1)=x-\ln(e^x+1)$	• proprietatile logaritmilor

b)

<table>
<tr><th>Cum gandim ?</th><th>Ce trebuie sa stim ?</th></tr>
<tr><td>

Varianta 1.

Vom tine cont ca $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x+1}=0$ (se aplica regula lui l'Hospital), $n\in N^*$

Avem $\lim\limits_{x\to\infty}x^2 f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)^{x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left[\left(1+\frac{-1}{e^x+1}\right)^{-(e^x+1)}\right]^{\frac{-x^2}{e^x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{x^2}{e^x+1}\cdot\ln e\right)=0.$

</td><td>

• regula lui l'Hospital

• limite remarcabile

• identificarea cazurilor de nedeterminare

</td></tr>
<tr><td>

Varianta 2.

$\lim\limits_{x\to\infty}x^2 f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\ln(e^x+1)}{\frac{1}{x^2}}\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{e^x}{e^x+1}}{\frac{-2}{x^3}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{e^x+1}\right)=0$

</td><td>

• regula lui l'Hospital

</td></tr>
</table>

c)

<table>
<tr><th>Cum gandim ?</th><th>Ce trebuie sa stim ?</th></tr>
<tr><td>

Cum functia este continua pe R, nu are asimptote verticale.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\frac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\ln 1=0.$

Asadar $y=0$ este asimptota orizontala spre $+\infty$.

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-\ln(e^x+1)}{x}=1-\frac{0}{-\infty}=1$

$n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=-\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^x+1)=-\ln 1=0$

Dreapta $y=x$ (prima bisectoare) este asimptota oblica spre $-\infty$.

</td><td>

• Cum se determina asimptotele verticale, oblice si orizontale

</td></tr>
</table>

2. **Se considera sirul** $(I_n)_{n\in N}$ **definit prin** $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx,\quad n\in N$.

a) **Sa se calculeze** $I_0+I_1+I_2$.

b) **Sa se demonstreze ca sirul este convergent.**

c) **Sa se calculeze** $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

a)

Cum gandim ?	**Ce trebuie sa stim ?**
Varianta 1. $I_0=\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx=\ln(x+1)\Big\vert_0^1=\ln 2$. $I_1=\int_o^1 \frac{x}{x+1}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(x-\ln(x+1)\right)\Big\vert_0^1=1-\ln 2$. $I_2=\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^1 \frac{x^2-1+1}{x+1}dx=\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=$ $=\left(x^2-x+\ln(x+1)\right)\Big\vert_0^1=\ln 2$. Deci $I_0+I_1+I_2=1+\ln 2$. **Varianta 2.** $I_0+I_1+I_2=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+1}+\frac{x^2}{x+1}\right)dx=\int_0^1\left(1+\frac{x^2}{x+1}\right)dx=1+I_2=$ $=1+\ln 2$.	• formulele pentru integralele functiilor elementare • efectuarea unor transformari pentru a obtine fractii usor de integrat

b)

Cum gandim ?	**Ce trebuie sa stim ?**
$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\left(\frac{x^{n+1}}{x+1}-\frac{x^n}{x+1}\right)dx=\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x+1}dx<0, \quad x\in(0,1)$, deci sirul este descrescator. Observam ca $0<I_n<I_0$ deci sirul este marginit. Concluzie $(I_n)_{n\in N}$ este convergent.	• stabilirea monotoniei si marginirii unui sir • teorema de convergenta: “orice sir monoton si marginit este convergent”

c)

Cum gandim ?	**Ce trebuie sa stim ?**
Tinand seama ca $x\in(0,1)$ si $\frac{x^n}{x+1}<x^n$ avem $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx<\int_0^1 x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\vert_0^1=\frac{1}{n+1}$, deci $0<I_n<\frac{1}{n+1}$. Utilizand teorema clestelui obtinem $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.	• majorari convenabile • criterii de convergenta