Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri"**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude"
ediţia a XIV-a
Galaţi, 26 octombrie 2013

Clasa a VII-a

Problema 1.

Fie $ABCD$ un paralelogram, $AC \cap BD = \{O\}$ şi G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor ΔAOB, ΔBOC, ΔCOD, respectiv ΔDOA.

a) Să se demonstreze că $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram.

b) Dacă $G_1G_2G_3G_4$ este dreptunghi, atunci să se demonstreze că $ABCD$ este romb.

c) Dacă $ABCD$ are perimetrul egal cu 36 cm, atunci să se determine $G_1G_3 + G_2G_4$.

Mariana Coadă, profesor, Galaţi

Problema 2.

a) Să se determine numerele naturale n de forma $n = \overline{abcd}$, ştiind că n este egal cu produsul a trei numere naturale consecutive dintre care două sunt prime, iar $\overline{cd}$ şi $\overline{ab}$ sunt două numere naturale consecutive.

Diana Grigoretti, profesor, Galaţi

b) Se consideră 2013 numere naturale nenule cu proprietatea că suma inverselor lor este mai mare sau egală decât 11. Demonstraţi că cel puţin două numere naturale dintre cele 2013 numerele naturale nenule sunt egale.

Marin Dolteanu, profesor, Galaţi

Problema 3.

Fie a, b, c şi d numere întregi impare astfel încât: $0 < a < b < c < d$, $a \cdot d = b \cdot c$, $a + d = 2^k$ şi $b + c = 2^m$, unde $m, k \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că $a = 1$.

***

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XIV-a
Galaţi, 26 octombrie 2013

Clasa a VII-a

SOLUŢII

Problema 1.

a) Notăm cu M, N, P, Q mijloacele segmentelor $[AB],[BC],[CD]$ şi, respectiv $[DA]$. Rezultă că $G_1 \in (OM)$, $\frac{OG_1}{OM}=\frac{2}{3}, G_2 \in (ON), \frac{OG_2}{ON}=\frac{2}{3}$, $G_3 \in (OP)$, $\frac{OG_4}{OP}=\frac{2}{3}$ şi $G_4 \in (OQ)$, $\frac{OG_4}{OQ}=\frac{2}{3}$. Deoarece diagonalele unui paralelogram se taie în părţi congruente, rezultă că $[OM]$ este linie mijlocie în triunghiul ΔABC, $[OP]$ este linie mijlocie în triunghiul ΔBCD, $[ON]$ este linie mijlocie în triunghiul ΔABC şi $[OQ]$ este linie mijlocie în triunghiul ΔABD, de unde obţinem că $OM \parallel BC$, $OP \parallel BC$ şi $ON \parallel DC$, $OQ \parallel AB$, adică punctele M, G_1, O, G_3, P sunt coliniare şi punctele N, G_2, O, G_4, Q sunt coliniare. Tot din proprietăţile linei mijlocii într-un triunghi obţinem că $OM = OP = \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2}$ şi $ON = OQ = \frac{DC}{2} = \frac{AB}{2}$, deci $OG_1 = \frac{2}{3}\cdot OM = \frac{2}{3}\cdot\frac{BC}{2} = \frac{BC}{3}$, $OG_3 = \frac{2}{3}\cdot OP = \frac{2}{3}\cdot\frac{BC}{2} = \frac{BC}{3}$, $OG_2 = \frac{2}{3}\cdot ON = \frac{2}{3}\cdot\frac{AB}{2} = \frac{AB}{3}$ şi $OG_4 = \frac{2}{3}\cdot OQ = \frac{2}{3}\cdot\frac{AB}{2} = \frac{AB}{3}$. Prin urmare, $OG_1 = OG_3 = \frac{BC}{3}$ şi $OG_2 = OG_4 = \frac{AB}{3}$, adică diagonalele patrulaterului $G_1G_2G_3G_4$ se taie în părţi congruente, deci $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram, ceea ce trebuia demonstrat.

b) Dacă $G_1G_2G_3G_4$ este dreptunghi, atunci $G_1G_3 = G_2G_4 \Leftrightarrow OG_1 + OG_3 = OG_2 + OG_4 \Leftrightarrow \frac{BC}{3}+\frac{BC}{3} = \frac{AB}{3}+\frac{AB}{3} \Leftrightarrow BC = AB$. Prin urmare, $ABCD$ este paralelogram cu două laturi alăturate congruente $[AB]$ şi $[BC]$, de unde obţinem că $ABCD$ este romb.

c) Perimetrul paralelogramului $ABCD$ este $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 2\cdot(AB+BC) = 36$, deci $AB + BC = 18$. Dar, $G_1G_3 + G_2G_4 = G_1O + OG_3 + G_2O + OG_4 = \frac{BC}{3}+\frac{BC}{3}+\frac{AB}{3}+\frac{AB}{3} = \frac{2\cdot(AB+BC)}{3} = \frac{2\cdot 18}{3} = 12\text{ cm}$. Răspuns, $G_1G_3 + G_2G_4 = 12\text{ cm}$.

Problema 2.

a) Din ipoteză avem că $n = \overline{abcd} = (m-1)\cdot m\cdot(m+1)$, unde $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$. Deci, $n = m^3 - m$ şi $1000 < m^3 - m < 10000$, de unde deducem că $11 \le m \le 21$. Ţinând cont că printre numerele $m-1$, m, $m+1$ sunt două numere prime, obţinem că $m = 12$ sau $m = 18$. Avem că $n = 11\cdot 12\cdot 13 = 1716$ cu $\overline{ab} = 17$ şi $\overline{cd} = 16$ sau $n = 17\cdot 18\cdot 19 = 5814$ cu $\overline{ab} = 58$ şi $\overline{cd} = 14$. Dar, din ipoteză avem că $\overline{cd}$ şi $\overline{ab}$ sunt numere naturale consecutive, deci problema are o singură soluţie $n = \overline{abcd} = 1716$.

b) Notăm cele 2013 numere naturale nenule cu $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2013}$ şi presupunem prin absurd că acestea sunt distincte două câte două. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că numerele naturale $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2013}$ sunt ordonate crescător, adică $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{2013}$. Deoarece $a_1 \geq 1,\ a_2 \geq 2,\ a_3 \geq 3, ..., a_{2013} \geq 2013$, rezultă inegalităţile $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_{2013}} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2013} <$ $< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2013} + \frac{1}{2014} + ... + \frac{1}{2047} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + ... + \left(\frac{1}{1024} + \frac{1}{1025} + ... + \frac{1}{2047}\right) <$ $< 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + ... + \underbrace{\left(\frac{1}{1024} + \frac{1}{1024} + ... + \frac{1}{1024}\right)}_{\text{de 1024 ori}} < \underbrace{1 + 1 + 1 + ... + 1}_{\text{de 11 ori}} = 11$. Prin urmare, avem $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_{2013}} < 11$, ceea ce este în contradicţie cu ipoteza. Deci, presupunerea făcută este falsă, de unde deducem că cel puţin două numere naturale dintre cele 2013 numerele naturale nenule $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2013}$ sunt egale.

Problema 3.

Rezultă că $a \cdot ((a+d) - (b+c)) = a \cdot (a-c) + a \cdot (d-b) = a \cdot (a-c) + a \cdot d - a \cdot b = a \cdot (a-c) + b \cdot c - a \cdot b =$ $= a \cdot (a-c) - b \cdot (a-c) = (a-b) \cdot (a-c) > 0$, de unde deducem că $a + d > b + c$, adică $m < k$. Conform ipotezei $a \cdot (2^k - a) = b \cdot (2^m - b) \Leftrightarrow 2^m \cdot b - 2^k \cdot a = b^2 - a^2$, de unde rezultă că 2^m divide $b^2 - a^2$, adică 2^m divide $(b-a) \cdot (b+a)$. Dacă $4 | (a+b)$ şi $4 | (b-a)$, atunci 4 divide $(a+b) + (b-a)$, adică 4 divide $2 \cdot a$, de unde obţinem că $2 | a$, ceea ce reprezintă o contradicţie, deoarece a este număr natural impar. Prin urmare, numerele $a+b$ şi $b-a$ nu sunt ambele divizibile cu 4 şi folosind că 2^m divide $(b-a) \cdot (b+a)$, obţinem că unul dintre numerele $b+a$ şi $b-a$ este divizibil cu 2^{m-1}, număr pe care-l notăm cu x. Deci, $2^{m-1} | x$ şi $0 < x \leq b + a < b + c = 2^m$, de unde obţinem $x = 2^{m-1}$. Dacă a şi b nu sunt prime între ele şi p este un divizor comun care este număr natural prim, atunci din $b + a = 2^{m-1}$ sau $b - a = 2^{m-1}$ rezultă că p divide 2^{m-1}, adică $p = 2$, de unde obţinem mai departe că a şi b sunt numere naturale pare. Contradicţie, deci numerele naturale a şi b sunt prime între ele. Dacă b şi c nu sunt prime între ele şi q este un divizor comun care este număr natural prim, atunci din $b + c = 2^m$ rezultă că q divide 2^m, adică $q = 2$, de unde obţinem mai departe că b şi c sunt numere naturale pare. Contradicţie, deci numerele naturale b şi c sunt prime între ele. Analog se demonstrează că a şi c sunt prime între ele.

Am obţinut că:

- numerele naturale a şi b sunt prime între ele
- numerele naturale a şi c sunt prime între ele
- $a \cdot d = b \cdot c$, adică $a | b \cdot c$,

de unde de rezultă că $a = 1$, ceea ce trebuia demonstrat.

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri"**

Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude"

ediţia a XIV-a

Galaţi, 26 octombrie 2013

Clasa a VII-a

BAREM DE CORECTARE NOTARE

Problema 1

a) G_1, O, G_3 coliniare şi G_2, O, G_4 coliniare .... 1 punct

$OG_1 = OG_3 = \frac{BC}{3}$ şi $OG_2 = OG_4 = \frac{AB}{3}$ .... 1 punct

Finalizare .... 1 punct

b) $AB = BC$ .... 1 punct

Finalizare .... 1 punct

c) $AB + BC = 18$ cm .... 1 punct

Finalizare .... 1 punct

Problema 2

a) $n = \overline{abcd} = (m-1) \cdot m \cdot (m+1) \Rightarrow 11 \le m \le 21$ .... 1 punct

$m = 12$ sau $m = 18$ .... 1 punct

Finalizare .... 1 punct

b) Alegerea metodei de rezolvare (reducerea prin absurd) .... 1 punct

$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{2013}} < 11$ .... 2 puncte

Finalizare .... 1 punct

Problema 3

$a+b$ şi $b-a$ nu sunt ambele divizibile cu 4 .... 2 puncte

$b + a = 2^{m-1}$ sau $b - a = 2^{m-1}$ .... 2 puncte

a şi b sunt prime între ele .... 1 punct

a şi c sunt prime între ele .... 1 punct

Finalizare .... 1 punct