Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**

Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”

ediţia a XIV-a

Galaţi, 26 octombrie 2013

Clasa a VIII-a

Problema 1.

În ΔABC, $m(\angle B)=30^0$, $m(\angle C)=15^0$, iar punctul M este mijlocul laturii $[BC]$.

a) Să se determine valoarea raportului $\dfrac{BC}{AC}$.

b) Să se demonstreze că $AM=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}$.

Petre Bătrâneţu, profesor, Galaţi

Problema 2.

a) Să se demonstreze că $|x-1|+|x-5|+|x-9|+|x-13|+...|x-2013|\geq 504^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
În ce situaţie se realizează egalitatea ?

Mihai Totolici, profesor, Galaţi

b) Se consideră numărul natural $x=112\underbrace{000...0}_{n\ zerouri}896$.

Să se determine $n\in\mathbb{N}$ pentru care numărul x este pătrat perfect.

Alexandru Ionescu, elev, Galaţi

Problema 3.

a) Punctele M_1, M_2, M_3, M_4 situate în plan verifică proprietatea că distanţa dintre oricare două dintre ele este situată în intervalul $\left[2013;\ 2013\cdot\sqrt{2}\right]$.

Să se demonstreze că există un cerc pe care sunt situate cele 4 puncte, a cărui rază se cere a fi precizată.

Prelucrare Constantin Ursu, profesor, Galaţi

b) În triunghiul ABC, $AB\neq AC$, se consideră bisectoarele $(BD$, respectiv $(CE$, $D\in(AC)$, $E\in(AB)$. Mediatoarea segmentului $[EC]$ intersectează dreapta BD în punctul M. Fie $DF \parallel ME$, $F\in EC$. Să se demonstreze că $[BF]\equiv[FD]$.

***

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România — **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**

Filiala Galaţi — **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XIV-a

Galaţi, 26 octombrie 2013

Clasa a VIII-a

SOLUŢII

Problema 1.

Soluţie. a) Fie $CD \perp AB$, $D \in AB$. În ΔBCD dreptunghic, $m(\angle B) = 30^0$, deci $BC = 2 \cdot x$, unde $x = CD$. Din $m(\angle BCD) = 60^0$ şi $m(\angle ACB) = 15^0$, rezultă că $m(\angle ACD) = 45^0$, deci triunghiul ADC este dreptunghic isoscel cu ipotenuza $AC = x \cdot \sqrt{2}$. Prin urmare, $\frac{BC}{AC} = \frac{2 \cdot x}{x \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

b).Conform punctului **a)**, rezultă că $\frac{MC}{AC} = \frac{x}{x \cdot \sqrt{2}} = \frac{AC}{BC}$, deci $\Delta ACM \sim \Delta BCA$ $(L.U.L.)$, aşadar $\frac{MC}{AC} = \frac{AC}{BC} = \frac{AM}{AB}$, de unde $AM = \frac{AB \cdot AC}{BC}$.

Problema 2.

Soluţie. a) Avem succesiv, $|x-1| + |x-2013| = |x-1| + |2013-x| \geq |x-1+2013-x| = 2012$, iar egalitatea are loc atunci când $x-1$ şi $2013-x$ au acelaşi semn, adică $x \in [1\ ;\ 2013]$. Analog rezultă inegalităţile: $|x-5| + |x-2009| \geq 2004$, $|x-9| + |x-2005| \geq 1996, ...,$ $|x-1005| + |x-1009| \geq 4$, de unde, prin adunare rezultă că

$$|x-1| + |x-5| + |x-9| + |x-13| + ...|x-2013| \geq 4 + 12 + 20 + ... + 2012 = \frac{2016 \cdot 252}{2} = 504^2.$$

Egalitatea are loc atunci când $x \in [1;2013] \cap [5;2009] \cap ... \cap [1005\ ;1009]$, de unde $x \in [1005\ ;\ 1009]$.

b) Pentru $n = 0$, $x = 112896 = 336^2$.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $x = 112 \cdot 10^{n+3} + 896 = 112 \cdot \left(10^{n+3} + 8\right) = 4^2 \cdot 7 \cdot \left(10^{n+3} + 8\right)$, deci $10^{n+3} + 8 = 7 \cdot k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$, de unde $u\left(7 \cdot k^2\right) = 8$, adică $u\left(k^2\right) = 4$, deci $u(k) \in \{2\ ,\ 8\}$.

Cazul 1.

$u(k) = 2$, deci $k = 10 \cdot a + 2$, $a \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $10^{n+3} + 8 = 7 \cdot (10 \cdot a + 2)^2 = 700 \cdot a^2 + 280 \cdot a + 28$, deci $10^{n+3} = 700 \cdot a^2 + 280 \cdot a + 20$, de unde $10^{n+2} = 70 \cdot a^2 + 28 \cdot a + 2 \vdots 10^3$, adică $2 \cdot \left(35 \cdot a^2 + 14 \cdot a + 1\right) \vdots 2^3 \cdot 5^3$, de unde rezultă că $35 \cdot a^2 + 14 \cdot a + 1 \vdots 4$. Se observă că $a = 2 \cdot b + 1$, $b \in \mathbb{N}$ şi va rezulta că $35 \cdot a^2 + 14 \cdot a + 1 = 35 \cdot \left(4 \cdot b^2 + 4 \cdot b + 1\right) + 14 \cdot (2 \cdot b + 1) + 1 = M_4 + 50 = M_4 + 2$, contradicţie.

Cazul 2.

$u(k) = 8$, deci $k = 10 \cdot a + 8$, $a \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $10^{n+3} + 8 = 7 \cdot (10 \cdot a + 8)^2 = 700 \cdot a^2 + 1120 \cdot a + 448$, deci $10^{n+3} = 700 \cdot a^2 + 1120 \cdot a + 440$, de unde $10^{n+2} = 70 \cdot a^2 + 112 \cdot a + 44 \vdots 10^3$, adică $2 \cdot \left(35 \cdot a^2 + 56 \cdot a + 22\right) \vdots 2^3 \cdot 5^3$,de unde rezultă că $\left(35 \cdot a^2 + 56 \cdot a + 22\right) \vdots 4$, deci $35 \cdot a^2 = M_4 + 2$, adică $a^2 = M_4 + 2$, contadicţie.

Deci $n=0$ este singura soluție a problemei.

Problema 3.

Soluție. a) Fie $2013=n$, $n\in\mathbb{N}^*$. Din ipoteză rezultă că $M_iM_j^{\,2}\le 2\cdot n^2$, $M_iM_k^{\,2}+M_kM_j^{\,2}\ge n^2+n^2=2\cdot n^2$, deci $M_iM_k^{\,2}\le M_iM_j^{\,2}+M_jM_k^{\,2}$, adică cele trei puncte sunt vârfurile unui triunghi ascuțitunghic, cel mult dreptunghic, oricare ar fi indicii distincți $i\,,j,k\in\{1,2,\,3,4\}$. Mai mult, rezultă că toate cele 4 puncte sunt vârfurile unui patrulater convex (justificare prin reducere la absurd), cu unghiurile cel mult de măsură 90^0, dar cum suma măsurilor lor este 360^0, rezultă că toate că cele 4 puncte sunt vârfurile unui dreptunghi, fie acesta $M_1M_2M_3M_4$, evident patrulater inscriptibil. Dacă $M_1M_2=a$, $M_2M_3=b$, din $2\cdot n^2=n^2+n^2\le a^2+b^2=M_1M_3^{\,2}\le 2\cdot n^2$, rezultă că $a=b$, deci $M_1M_2M_3M_4$ este un pătrat de latură $a=n$, iar raza cercului circumscris este $R=\dfrac{n\cdot\sqrt{2}}{2}=2013\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Bisectoarea $(BD$ intersectează cercul circumscris triunghiului EBC într-un punct M_1 şi din proprietățile unghiului înscris în cerc, rezultă că arcele $\overset{\frown}{M_1E}$ şi $\overset{\frown}{M_1C}$ sunt congruente, deci $[M_1E]\equiv[M_1C]$, aşadar M_1 se află pe mediatoarea segmentului $[EC]$, adică $M=M_1$. Rezultă că patrulaterul $EBCM$ este inscriptibil, deci $m(\sphericalangle BCE)=m(\sphericalangle EMB)=m(\sphericalangle DCE)=\dfrac{1}{2}\cdot m(\sphericalangle ACB)$ (1). Din $ME\parallel DF$ rezultă că $m(\sphericalangle EMB)=m(\sphericalangle FDB)$ (corespondente) şi din (1) rezultă că $m(\sphericalangle BCF)=m(\sphericalangle FDB)$, deci patrulaterul $BCDF$ este inscriptibil, şi deoarece $(CF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACB$, rezultă că arcele $\overset{\frown}{BF}$ şi $\overset{\frown}{FD}$ sunt congruente, deci coardele $[BF]$ şi $[FD]$ sunt congruente.

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**

Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”

ediţia a XIV-a

Galaţi, 26 octombrie 2013

Clasa a VIII-a

BAREM DE CORECTARE NOTARE

Problema 1

a) Obţinerea relaţiilor $BC = 2 \cdot x$, $AC = x \cdot \sqrt{2}$, unde $x = CD$, $D = pr_{AB}C$ ....2 puncte

Finalizare: $\dfrac{BC}{AC} = \sqrt{2}$ ....1 punct

b) Obţinerea relaţiei $\dfrac{MC}{AC} = \dfrac{AC}{BC}$ .... 1 punct

$\Delta ACM \sim \Delta BCA$ $(L.U.L.)$ ....2 puncte

Finalizare...1 punct

Problema 2

a) Obţinerea relaţiei $|x-1| + |x-2013| \geq 2012$, cu discutarea egalităţii...............................1 puncte

Obţinerea celorlalte inegalităţi analoage...1 punct

Finalizare, cu discutarea semnului „=”...1 puncte

b) Pentru $n = 0$, $x = 112896 = 336^2$ ....1 punct

Obţinerea relaţiei $10^{n+3} + 8 = 7 \cdot k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$., unde $x = 4^2 \cdot 7 \cdot \left(10^{n+3} + 8\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$................1 punct

Discutarea cazului $k = 10 \cdot a + 2$, $a \in \mathbb{N}^*$ ....1 punct

Discutarea cazului $k = 10 \cdot a + 8$, $a \in \mathbb{N}^*$ ....1 punct

Problema 3

a) Justficarea faptului că triunghiul $M_i\ M_j\ M_k$ este ascuţitunghic, cel mult dreptunghic, $\forall i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$, distincte două câte două.. 1 punct

M_1, M_2, M_3, M_4 sunt vârfurile unui patrulater convex...1 punct

M_1, M_2, M_3, M_4 sunt vârfurile unui dreptunghi...1 punct

M_1, M_2, M_3, M_4 sunt vârfurile unui pătrat, iar $R = 2013 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ....1 punct

b) $EBCM$ este patrulater inscriptibil... 1 punct

$BCDF$ este patrulater inscriptibil...1 punct

Finalizare:...1 punct