Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri"**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude"
ediţia a XIV-a
Galaţi, 26 octombrie 2013

Clasa a IX-a

Problema 1.

Să se rezolve în $\mathbb{R}_+$ **ecuaţia:** $(5x^2+3x+2)(5y^2-3y+2)=31xy$

Profesor Petre Bătrâneţu, Galaţi

Problema 2.

a) Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care există $x, y \in \mathbb{R},\ x, y \geq 0$, astfel încât $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ şi $\sqrt{x+n}+\sqrt{y+n} \in \mathbb{N}$.
b) Determinaţi numerele reale $x, y, z \geq 0$ şi n $\in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ şi $\sqrt{x+n}+\sqrt{y+n}+\sqrt{z+n} \in \mathbb{N}$

Profesor Georgeta Balacea, Galaţi

Problema 3.

Fie triunghiul isoscel ABC cu $(AB) \equiv (AC)$ şi măsura $\sphericalangle ABC = 75°$, punctul M este simetricul lui B faţă de dreapta AC, punctul N este simetricul lui M faţă de A.

Dacă $NP \cap BM = \{K\}$, $MP \cap NB = \{E\}$ şi $AB \cap NC = \{P\}$, se cere:

a) Raportul dintre aria triunghiului MEN şi aria triunghiului MEB.
b) Valoarea raportului $\dfrac{NP}{PK}$

Constantin Ursu, profesor, Galaţi

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**

Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”

ediţia a XIV-a

Galaţi, 26 octombrie 2013

Clasa a IX-a

SOLUŢII

Problema 1.

Soluţie.

Soluţie: Aplicăm inegalitatea mediilor şi avem:

$$5x^2+2\ge 2\sqrt{5x^2\cdot 2}=2\sqrt{10}x$$

$$5y^2+2\ge 2\sqrt{5y^2\cdot 2}=2\sqrt{10}y$$

Deci $(5x^2+3x+2)(5y^2-3y+2)\ge(2\sqrt{10}x+3x)(2\sqrt{10}y-3y)=(2\sqrt{10}+3)(2\sqrt{10}-3)xy=31xy$

Avem egalitate dacă: $5x^2=2, x=\sqrt{\frac{2}{5}}$ şi $5y^2=2, y=\sqrt{\frac{2}{5}}$

Problema 2

Soluţie.

a)Cazul I. Dacă x=y atunci x=y=1 $\Rightarrow n=m^2-1, m\in\mathbb{N}, m\ge 2$.

Cazul II. Dacă $x\ne y$, fie $k=\sqrt{x+n}+\sqrt{y+n}\in\mathbb{N}$.

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\Rightarrow x\ge 1$ sau $y\ge 1$ $\Rightarrow k\ge\sqrt{n}+\sqrt{n+1}>\sqrt{4n+1}$. (*)

$k<2\sqrt{n+2}$.(**)

Din (*) şi (**) $\Rightarrow 4n+1<k^2\le 4n+8$.

Restul împărţirii oricărui pătrat perfect la 4 este 1 sau 0 $\Rightarrow k^2\in\{4n+4, 4n+5\}$

Cazul II.1. $k^2=4n+4.\Rightarrow k=2m, m\in\mathbb{N}^*$ şi $n=m^2-1\Rightarrow$ soluţiile sunt x=y=1.

Cazul II.2. $k^2=4n+5\Rightarrow k=2m+1, m\in\mathbb{N}^*$ şi $n=m^2+m-1$.

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\\ \sqrt{x+n}+\sqrt{y+n}=\sqrt{4n+5}\end{cases}$$

Se obţin soluţiile : $x=1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4n+5}{4n+1}}$ şi $y=1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4n+5}{4n+1}}$

Prin urmare, soluţiile problemei sunt : $n=m^2-1, m\in\mathbb{N}, m\ge 2$ şi $n=m^2+m-1, m\in\mathbb{N}, m\ge 1$

b) Fie N= $\sqrt{x+n}+\sqrt{y+n}+\sqrt{z+n} \in \mathbb{N}$.

Cazul I. Dacă x=y=z atunci $3\sqrt{x}=1 \Rightarrow x=y=z=\frac{1}{9}$.

$N=3\bullet\sqrt{\frac{1}{9}+n}=\sqrt{9n+1}\in\mathbb{N}\Rightarrow N^2=9n+1\Rightarrow N=9k\pm1, k\in\mathbb{N}.$

Pentru $k=0$ considerăm doar valoarea N=1.

Prin urmare, $N^2=9n+1=(9k\pm1)^2\Rightarrow n=9k^2\pm2k$, $k\in\mathbb{N}$.

Cazul II. Dacă x,y,z nu sunt toate egale, atunci

$N^2=x+y+z+3n+2\left(\sqrt{(x+n)(y+n)}+\sqrt{(x+n)(z+n)}\sqrt{(z+n)(y+n)}\right).$

Din inegalitatea mediilor $\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{(x+n)(y+n)}\le n+\frac{x+y}{2}, cu\ egalitate\ pentru\ x=y\\ \sqrt{(x+n)(z+n)}\le n+\frac{x+z}{2}, cu\ egalitate\ pentru\ x=z\\ \sqrt{(z+n)(y+n)}\le n+\frac{z+y}{2}, cu\ egalitate\ pentru\ \mathrm{z}=y\end{cases}$

.

Dar x,y,z nu sunt toate egale

$\Rightarrow\sqrt{(x+n)(y+n)}+\sqrt{(z+n)(y+n)}+\sqrt{(x+n)(z+n)}<3n+x+y+z\Rightarrow$

$N^2<9n+3(x+y+z)\le9n+3$ (1).

$\begin{cases}\sqrt{(x+n)(y+n)}\ge n+\sqrt{xy}, \text{ cu egalitate dacă şi numai dacă } x=y\\ \sqrt{(x+n)(z+n)}\ge n+\sqrt{xz}, \text{ cu egalitate dacă şi numai dacă } x=z\\ \sqrt{(z+n)(y+n)}\ge n+\sqrt{zy}, \text{ cu egalitate dacă şi numai dacă } \mathrm{z}=y\end{cases}\Rightarrow$

$\sqrt{(x+n)(y+n)}+\sqrt{(z+n)(y+n)}+\sqrt{(x+n)(z+n)}\ge3n+\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}\Rightarrow$

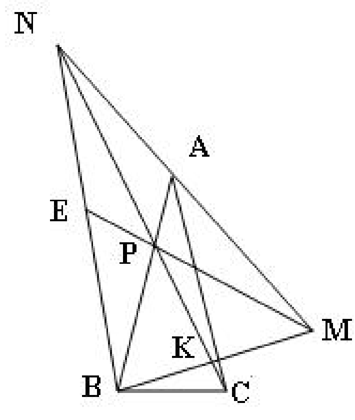
$N^2>9n+(x+y+z)+2(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz})=9n+(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2=9n+1.$ (2)

Din relațiile (1) şi (2) rezultă că $9n+1<N^2<9n+3\Rightarrow N^2=9n+2$.

Dar $N^2=9\bullet C+R$, unde $R\in\{0,1,4,7\}\Rightarrow N^2\ne9n+2\Rightarrow$ cazul x,y,z nu sunt toate egale nu convine.

Prin urmare soluția $x=y=z=\frac{1}{9}$ este unică, iar $n\in\{9k^2\pm2k\ /\ k\in\mathbb{N}\}$

Problema 3



Soluție.

a) m($\measuredangle ABC$)=m($\measuredangle ACB$)= 75° $\Rightarrow m(\sphericalangle BAC)=30°$;
AC este mediatoarea [BM] $\Rightarrow \Delta ABM$ este isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle BAM)=60°$
$\Rightarrow \Delta ABM$ este echilateral.
În triunghiul NBM, $AB=\frac{1}{2}MN$, $\Rightarrow m(\sphericalangle NBM)=90°$
Notăm AB=a $\Rightarrow NB=a\sqrt{3}.$

$$\begin{cases} NB \perp BM \\ AC \perp BM \end{cases} \Rightarrow NB \parallel AC$$

În triunghiul ABM, [AA'] este bisectoarea unghiului BAM $\Rightarrow$ m($\measuredangle A'AM$)=30°

$\Rightarrow m(\sphericalangle CAN) = 150°$

În triunghiul NBM avem : AB=AN=AM;
Dar triunghiul ABC este isoscel $\Rightarrow$ AC=AN $\Rightarrow$ triunghiul NAC este isoscel
$\Rightarrow m(\sphericalangle ANC) = m(\sphericalangle ACN) = 15°$
NB|| AC $\Rightarrow \sphericalangle ACN \equiv \sphericalangle BNC \Rightarrow m(\sphericalangle BNC) = 15°$. Prin urmare, (NC este bisectoarea unghiului MNC.
În Δ *NEM* rezultă conform teoremei bisectoarei :

$$\frac{EP}{PM} = \frac{NE}{NM} \quad (1)$$

In triunghiul NEM se aplică teorema lui Menelaus cu transversala A-P-B :

$$\frac{MA}{AN} \bullet \frac{NB}{BE} \bullet \frac{EP}{PM} = 1 \quad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă că $\frac{NE}{EB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Se arată că :

$$\frac{Aria\ \Delta MEN}{Aria\ \Delta MEB} = \frac{NE}{EB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) Se aplică teorema lui Van-Aubel în triunghiul BNM:

$$\frac{NE}{EB} + \frac{NA}{AM} = \frac{NP}{PK} \quad \text{de unde} \quad \frac{NP}{PK} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + 1 \ \Rightarrow \ \frac{NP}{PK} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$$

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**

Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”

ediţia a XIV-a

Galaţi, 26 octombrie 2013

Clasa a IX-a

BAREM DE CORECTARE NOTARE

Problema 1

2 puncte pentru inegalitatea mediilor: $$5x^2+2\ge 2\sqrt{5x^2\cdot 2}=2\sqrt{10}x$$ $$5y^2+2\ge 2\sqrt{5y^2\cdot 2}=2\sqrt{10}y$$

2 puncte pentru justificarea

$:(5x^2+3x+2)(5y^2-3y+2)\ge(2\sqrt{10}x+3x)(2\sqrt{10}y-3y)=(2\sqrt{10}+3)(2\sqrt{10}-3)xy=31xy$

2 puncte pentru $5x^2=2$ şi $5y^2=2$

1 punct pentru finalizare :

$x=\sqrt{\dfrac{2}{5}},x=\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

Observaţii: Pentru orice altă soluţie corectă problema va fi evaluată cu 7 puncte.

Problema 2

a) 4 puncte:

1 punct pentru cazul I. Dacă x=y atunci x=y=1 $\Rightarrow n=m^2-1, m\in\mathbb{N}, m\ge 2$.

Cazul II.

1 punct pentru justificarea relaţiei $4n+1<k^2\le 4n+8\Rightarrow k^2\in\{4n+4,4n+5\}$

1 punct pentru justificarea obţinerii soluţiilor x=y=1.

1 punct pentru justificarea obţinerii soluţiilor $n=m^2-1, m\in\mathbb{N}, m\ge 2$ şi $n=m^2+m-1, m\in\mathbb{N}, m\ge 1$

b) 3 puncte:

Cazul I.

1 punct pentru obţinerea soluţiilor $x=y=z=\dfrac{1}{9}$ şi $n=9k^2\pm 2k,\ \mathrm{k}\in\mathbb{N}$.

Cazul II.

Dacă x,y,z nu sunt toate egale.

1 punct pentru justificarea relaţiilor $N^2<9n+3(x+y+z)\le 9n+3$ (1). unde

$N=\sqrt{(x+n)(y+n)}+\sqrt{(x+n)(z+n)}\sqrt{(z+n)(y+n)}$ şi

$N^2>9n+(x+y+z)+2(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz})=9n+(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2=9n+1.$

1 punct pentru justificarea unicităţii soluţiei:
$x = y = z = \frac{1}{9}$ şi $n = 9k^2 \pm 2k,\ \mathrm{k} \in \mathbb{N}$.

Observaţii: Pentru orice altă soluţie corectă problema va fi evaluată cu 7 puncte.

Problema 3

a) 1 punct dacă justifică :
ΔAMB este echilateral şi m(∢NMB)=90°.
1 punct dacă aplică teorema bisectoarei în ΔNEM .
2 puncte dacă aplică teorema lui Menelaus şi calculează $\frac{NE}{EB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
. 1 punct pentru finalizare.

b) 1 punct aplicarea teoremei lui Van-Aubel
1 punct pentru finalizare.

Observaţii: Pentru orice altă soluţie corectă problema va fi evaluată cu 7 puncte.