Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”
Galaţi, 26 octombrie 2013

Clasa a X-a

Problema 1.

Se consideră mulţimea $M = \left\{ x \in (0,1) \cup (1,\infty) \mid 7 \cdot \ln^3 x - [\ln x]^3 - \{\ln x\}^3 = \{[\lg x]\} + \left[\left\{e^x\right\}\right] \right\}$.

Să se arate că are loc inegalitatea $\sum_{k=2}^{2013} \log_k x < \dfrac{2012^2}{\ln \dfrac{1}{(2013!)^2}}$, oricare ar fi $x \in M$.

Notaţiile $[\,\cdot\,]$ şi $\{\,\cdot\,\}$ reprezintă partea întreagă,respectiv partea fracţionară a unui număr real.

Vasile Duma,profesor,Galaţi

Problema 2.

Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ care verifică relaţia

$$f\left(f(n+1)+3\right) = n, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

***

Problema 3.

Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale, pozitive.Arătaţi că mulţimea

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid \frac{1+a_n}{a_{n-1}} > \left| \cos a_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sin a_{n-1} \right| \right\}$$ este infinită.

Iuliana Duma,profesor,Galaţi

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România — **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**

Filiala Galaţi — **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XIV-a

Galaţi, 26 octombrie, 2013

Clasa a X-a

SOLUŢII

Problema 1.

În identitatea $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3\cdot(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)$

înlocuim $a=\ln x, b=[\ln x], c=\{\ln x\}$ şi obţinem:

$0=7\cdot\ln^3 x-[\ln x]^3-\{\ln x\}^3=3\cdot(\ln x+[\ln x])\cdot([\ln x]+\{\ln x\})\cdot(\{\ln x\}+\ln x)$ sau

$(2\cdot[\ln x]+\{\ln x\})\cdot\ln x\cdot([\ln x]+2\cdot\{\ln x\})=0$. Sunt posibile cazurile:

1. $\ln x=0\Leftrightarrow x=1\notin M$
2. $\{\ln x\}=-2\cdot[\ln x]\Rightarrow\begin{cases}\{\ln x\}=0\\ [\ln x]=0\end{cases}\Rightarrow\ln x=0\Rightarrow x=1\notin M$
3. $2\cdot\{\ln x\}=-[\ln x]$.Egalitatea este posibilă dacă $2\cdot\{\ln x\}\in[0,2)\cap\mathbb{Z}$,ceea ce revine la

$\{\ln x\}=[\ln x]=0\Rightarrow x=1\notin M$ sau $2\cdot\{x\}=1=-[\ln x]$.Ultima condiţie conduce la rezolvarea sistemului

$\begin{cases}\{\ln x\}=\dfrac{1}{2}\\ [\ln x]=-1\end{cases}\Rightarrow\ln x=-\dfrac{1}{2}$ şi $x=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\Rightarrow M=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right\}$.

Calculăm suma şi folosind o consecinţă a inegalităţii mediilor rezultă

$$\sum_{k=2}^{2013}\log_k x=-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{2013}\log_k e=-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{2013}\frac{1}{\ln k}<-\frac{2012^2}{2\cdot\sum_{k=2}^{2013}\ln k}=\frac{2012^2}{\ln\frac{1}{(2013!)^2}}\ .$$

Altfel: $7\cdot(u+v)^3-(u^3+v^3)=0$, unde $u=[\ln x]$, $v=\{\ln x\}$,etc.

Problema2.

Înlocuim în relaţia funcţională n prin $f(n+1)+2$ şi obţinem $f(f(f(n+1)+3)+3)=f(n+1)+2$.

Folosim relaţia iniţială şi trebuie determinată funcţia f, dată prin condiţia

$f(n+3)=f(n+1)+2, \forall n\in\mathbb{Z}$ sau $f(n+2)=f(n)+2, \forall n\in\mathbb{Z}$.

Demonstrăm prin inducţie că $\begin{cases}f(2\cdot n)=2\cdot n+f(0)\\ f(2\cdot n+1)=2\cdot n+f(1)\end{cases}, \forall n\in\mathbb{Z}$.

Arătăm că $f(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$.Este evident că $f(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}$ şi dacă $m\in\mathbb{Z}$ atunci există $n=f(m+1)+3\in\mathbb{Z}$ astfel încât $f(n)=f(f(m+1)+3)=m$,deci $\mathbb{Z}\subset f(\mathbb{Z})$.Din $f(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ rezultă că $f(0)$ şi $f(1)$ au parităţi diferite.Dacă $f(0)$ este impar şi $f(1)$ par atunci din $f(f(2\cdot n+1)+3)=2\cdot n$ rezultă că $f(2\cdot n+f(1)+3)=2\cdot n\Rightarrow 2\cdot n+f(1)+3-1+f(1)=2\cdot n\Rightarrow f(1)=1$.Dacă $f(0)$ este par şi

$f(1)$ impar atunci $f\left(f\left(2\cdot n+1\right)+3\right)=2\cdot n\Rightarrow f\left(2\cdot n+f\left(1\right)+3\right)=2\cdot n\Rightarrow$
$2\cdot n+f\left(1\right)+3+f\left(0\right)=2\cdot n\Rightarrow f\left(1\right)=-3-f\left(0\right)$.Forma găsită pentru funcția f este

$f\left(n\right)=\begin{cases} n+c\,, & n\ par \\ n-4-c\,, & n\ impar \end{cases}$,unde $c=f\left(0\right)$ este număr par.

Se arată că funcțiile determinate verifică relația funcțională dată.

Problema3.

Presupunem prin reducere la absurd că mulțimea A este finită şi fie $N=\max A$.

Dacă $n\in\mathbb{N}, n>N\Rightarrow n\notin A$,adică, $\frac{1+a_n}{a_{n-1}}\le\left|\cos a_{n-1}+\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin a_{n-1}\right|,\forall n>N$.

Dar $\left|\cos a_{n-1}+\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin a_{n-1}\right|\le\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\cos^2 a_{n-1}+\sin^2 a_{n-1}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$ .prin tranzitivitate obținem că

$\frac{1+a_n}{a_{n-1}}\le\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}},\forall n>N\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{n+1}}\le\frac{a_{n-1}}{\sqrt{n}}-\frac{a_n}{\sqrt{n+1}},\forall n>N$ .Sumând ultima relație pentru n luând valori de la $N+1$ la m obținem:

$$\sum_{n=N+1}^{m}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\le\frac{a_N}{\sqrt{N+1}}-\frac{a_m}{\sqrt{m+1}}<\frac{a_N}{\sqrt{N+1}}.$$

Dacă,eventual,adunăm în ambii membri ai inegalității constanta $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{N}}$ şi notăm

$M=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{N}}+\frac{a_N}{\sqrt{N+1}}$ rezultă că $\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{\sqrt{k}}<M$

Dar $\frac{1}{\sqrt{k}}>2\cdot\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$ şi prin adunare rezultă că $2\cdot\left(\sqrt{m+2}-1\right)<\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{\sqrt{k}}<M,\forall m\in\mathbb{N}^*$

sau $m<\left(\frac{M}{2}+1\right)^2-2,\forall m\in\mathbb{N}^*$, fals,pentru că $\mathbb{N}$ nu este finită.Urmează că mulțimea A este infinită.

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”
ediţia a XIV-a
Galaţi, 26 octombrie, 2013

Clasa a X-a

BAREM DE CORECTARE NOTARE

Problema 1

Determinarea valorii membrului drept al egalităţii................................**1punct**
Prelucrarea membrului drept al egalităţii...**1punct**
Finalizarea determinării mulţimii M..**2puncte**
Calcularea sumei..**1punct**
Aplicarea corectă a unei consecinţe a inegalităţii mediilor....................**1punct**
Finalizarea calculului algebric...**1punct**

Problema 2

Obţinerea relaţiei de recurenţă $f(n+2)=f(n)+2, \forall n\in\mathbb{Z}$ **1punct**

Determinarea şi demonstrarea prin inducţie a formei

$\begin{cases} f(2\cdot n)=2\cdot n+f(0) \\ f(2\cdot n+1)=2\cdot n+f(1) \end{cases}, \forall n\in\mathbb{Z}$ **2puncte**

Determinarea imaginii funcţiei f **1punct**

Determinarea parităţii diferite a numerelor $f(0)$ şi $f(1)$ **2puncte**

Verificarea soluţiei finale..**1punct**

Problema 3

Folosirea metodei reducerii la absurd şi determinarea condiţiei
contrare pe care o verifică şirul de la un rang încolo............................**1punct**
Determinarea majorării şi obţinerea relaţiei

$\frac{1+a_n}{a_{n-1}}\le\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}, \forall n>N \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}}\le\frac{a_{n-1}}{\sqrt{n}}-\frac{a_n}{\sqrt{n+1}}, \forall n>N$ **2puncte**

Sumarea relaţiei anterioare..**1punct**

Demonstrarea inegalităţii $.2\cdot\left(\sqrt{m+2}-1\right)<\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{\sqrt{k}}$ **2puncte**

Obţinerea contradicţiei şi finalizare..**1punct**