Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**

Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”

ediţia a XIV-a

Galaţi , 26 octombrie 2013

Clasa a XI-a

Problema 1.

a) Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $x_1 = x_2 = 0; x_3 = 1$ şi $\prod\limits_{k=n}^{n+3}(1+x_k) = 4 + \sum\limits_{k=n}^{n+3} x_k$ şi $\prod\limits_{k=n+1}^{n+3}(1+x_k) \neq 1$.

Studiaţi monotonia şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ şi calculaţi $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1+x_n}{x_{n+1}+2}$ şi $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1+x_n}{2+x_{n+1}}$

Constantin Ursu, profesor, Galaţi

b) Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{R}$ inecuaţia: $x\cdot[x]\geq 9^{[\log_3 x]}$,unde prin $[x]$ s-a notat partea întreagă a lui x.

Problema 2.

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases} \dfrac{x}{5(x^2+1)} = \dfrac{y}{6(y^2+1)} = \dfrac{z}{7(z^2+1)} \\ x\cdot y + y\cdot z + z\cdot x = 1 \end{cases}$

Vasile Popa, profesor, Galaţi

Problema 3.

Fiind dat $n\in\mathbb{N}, n\geq 2,$ să se determine numărul maxim de termeni nenuli din suma $\sum\limits_{i,j=1}^{n}|f(i)-f(j)|$ după toate alegerile funcţiei $f:\{1,2,...,n\}\to\{a,b,c\}$ unde $a,b,c\in\mathbb{R}$ fixate şi distincte două câte două.

Dorin Andrica

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude" , ediţia a XIV-a
Galaţi , 26 octombrie 2013

Clasa a XI-a

SOLUŢII

Problema 1.

Soluţie. a) Ipoteza se poate scrie $(1+x_n)(1+x_{n+1})(1+x_{n+2})(1+x_{n+3})=4+x_n+x_{n+1}+x_{n+2}+x_{n+3}$.

Notând $1+x_n=a_n$ relaţia devine $a_n\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}\cdot a_{n+3}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$ sau trecând n în $n+1$ obţinem $a_{n+1}\cdot a_{n+2}\cdot a_{n+3}\cdot a_{n+4}=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4}$.

Scăzând acum ultimele două relaţii avem $(a_{n+4}-a_n)\cdot(a_{n+1}\cdot a_{n+2}\cdot a_{n+3}-1)=0$ şi ţinând cont de ipoteză avem $a_n=a_{n+4},(\forall)n\geq 1$, adică şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este periodic de perioadă 4.

Acum $a_1=a_2=1, a_3=2$ iar $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4=a_1+a_2+a_3+a_4$ deci $a_4=4$ rezultă că $x_4=3$.

Cum $x_n=a_n-1$ avem şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ periodic de perioadă 4 deci acesta nu este monoton.

In continuare avem $\frac{1+x_n}{2+x_{n+1}}\in\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{5},2\}$ deci marginea superioară căutată este 2 iar marginea inferioară este $\frac{1}{3}$.

b) Avem $x>0$ condiţie de existenţă;

Dacă $x\in(0,1)$ inegalitatea devine $0\geq 9^{[\log_3 x]}$ fals;

Dacă $x\geq 1$ atunci putem considera $x=3^k\cdot 3^\alpha, k\in\mathbb{N}, \alpha\in[0,1)$. Avem $3^k\leq[x]\leq x=3^{k+\alpha}$ sau $k\leq\log_3[x]\leq\log_3 x=k+\alpha\Rightarrow[\log_3 x]=k$ deci avem $\log_3 x+\log_3[x]\geq k+\alpha+k=2\cdot k+\alpha$ de unde rezultă că $x\cdot[x]\geq 3^{2\cdot k}=3^{2\cdot[\log_3 x]}=9^{[\log_3 x]}$. Deci soluţia inecuaţiei este intervalul $[1,\infty)$.

Problema 2.

Soluţie. Observăm că x,y,z sunt fie pozitive, fie negative. Analizăm cazul $x,y,z\in(0,\infty)$:

Considerăm $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $x=tg\alpha, y=tg\beta, z=tg\gamma$. Avem în continuare relaţiile:

$$tg\alpha\cdot tg\beta+tg\beta\cdot tg\gamma+tg\gamma\cdot tg\alpha=1\Leftrightarrow tg\alpha\cdot(tg\beta+tg\gamma)=1-tg\beta\cdot tg\gamma\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow tg\alpha=\frac{1-tg\beta\cdot tg\gamma}{tg\beta+tg\gamma}=\frac{1}{tg(\beta+\gamma)}=ctg(\beta+\gamma)\Leftrightarrow tg\alpha=tg\left(\frac{\pi}{2}-\beta-\gamma\right)\Leftrightarrow\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$$

Dar $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ deci $k=0$ adică $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$.

Avem în continuare $\frac{x}{x^2+1}=\frac{tg\alpha}{tg^2\alpha+1}=tg\alpha\cdot\cos^2\alpha=\frac{\sin 2\cdot\alpha}{2}$ și analog celelalte relații deci obținem:
$\frac{\sin 2\cdot\alpha}{5}=\frac{\sin 2\cdot\beta}{6}=\frac{\sin 2\cdot\gamma}{7}$ cu $2\cdot\alpha+2\cdot\beta+2\cdot\gamma=\pi$.
Considerăm triunghiul ΔMNP cu laturile $MN=5, NP=6, PM=7$ și unghiurile
$\sphericalangle P=2\cdot\alpha, \sphericalangle M=2\cdot\beta, \sphericalangle N=2\cdot\gamma$ și cu notațiile obișnuite avem:
$tg\alpha=\sqrt{\frac{(p-7)\cdot(p-6)}{p\cdot(p-5)}}=\frac{\sqrt{6}}{6}, tg\beta=\sqrt{\frac{(p-7)\cdot(p-5)}{p\cdot(p-6)}}=\frac{2\cdot\sqrt{6}}{9}, tg\gamma=\sqrt{\frac{(p-5)\cdot(p-6)}{p\cdot(p-7)}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ deci
$x=\frac{\sqrt{6}}{6}, y=\frac{2\cdot\sqrt{6}}{9}, z=\frac{\sqrt{6}}{3}$.
In cazul în care $x,y,z\in(-\infty,0)$ facem notația $m=-x, n=-y, p=-z$ și reducem la primul caz,
obținând soluțiile negative $x=-\frac{\sqrt{6}}{6}, y=-\frac{2\cdot\sqrt{6}}{9}, z=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Problema 3

Soluție. Observăm că fiecare funcție $f:\{1,2,...,n\}\to\{a,b,c\}$ determină o partiție a mulțimii $M=\{1,2,...,n\}$ și anume $M=M_a\cup M_b\cup M_c$ unde s-a notat
$M_a=f^{-1}(\{a\}), M_b=f^{-1}(\{b\}), M_c=f^{-1}(\{c\})$.

Pentru o funcție fixată putem scrie :

$$\sum_{i,j=1}^{n}|f(i)-f(j)|=\sum_{(i,j)\in M\times M}|f(i)-f(j)| \qquad (1)$$

Dar $M\times M=(M_a\cup M_b\cup M_c)\times(M_a\cup M_b\cup M_c)=(M_a\times M_a)\cup(M_a\times M_b)\cup(M_a\times M_c)\cup...$
$...\cup(M_c\times M_a)\cup(M_c\times M_b)\cup(M_c\times M_c)$ adică se produce o partiție a mulțimii $M\times M$.

Dacă $(i,j)\in M_a\times M_a$ sau $(i,j)\in M_b\times M_b$ sau $(i,j)\in M_c\times M_c$ atunci termenii corespunzători din suma (1) sunt nuli. Deducem că termenii nenuli din suma (1) sunt aceia care corespund situației când $(i,j)\in(M_a\times M_b)\cup(M_a\times M_c)\cup(M_b\times M_a)\cup(M_b\times M_c)\cup(M_c\times M_a)\cup(M_c\times M_b)$ adică sunt în număr de $2\cdot(|M_a|\cdot|M_b|+|M_a|\cdot|M_c|+|M_b|\cdot|M_c|)$

Notând pentru a simplitate $|M_a|=p, |M_b|=q, |M_c|=r$, avem $p\geq 0, q\geq 0, r\geq 0$ și $p+q+r=n$.
Prin urmare, numărul maxim de termeni nenuli din suma (1),când f parcurge mulțimea funcțiilor date, este

$$2\cdot\max(p\cdot q+p\cdot r+q\cdot r) \qquad (2)$$

cu $p,q,r\in\mathbb{N}$ și $p+q+r=n$.
Fie (p_0,q_0,r_0) un triplet care atinge maximul în (2) și să fixăm o ordonare, de exemplu $p_0\geq q_0\geq r_0$.

Observăm că două numere din acest triplet trebuie să aibă modulul diferenței cel mult egal cu 1 deoarece, dacă am presupune că $p_0-r_0\geq 2$ atunci alegem tripletul $(p_1,q_1,r_1)=(p_0-1,q_0,r_0+1)$ și avem $p_1\cdot q_1+p_1\cdot r_1+q_1\cdot r_1=p_0\cdot q_0+p_0\cdot r_0+q_0\cdot r_0+p_0-r_0-1>p_0\cdot q_0+p_0\cdot r_0+q_0\cdot r_0$ ceea ce contrazice proprietatea de maxim a tripletului (p_0,q_0,r_0).

Avem următoarele cazuri:

I. $n=3\cdot k$

Deoarece $p+q+r=3\cdot k$ și p_0 este cel mai mare din tripletul $\left(p_0,q_0,r_0\right)$ rezultă că $p_0\geq k$.

Dacă am avea $p_0\geq k+1$ atunci ar trebui ca $q_0+r_0\leq 2\cdot k-1$ și de aici ar rezulta conform ordinii presupuse că $r_0\leq k-1$ adică $p_0-r_0\geq 2$ fals. Deci în mod necesar avem $p_0=k$ .De aici deducem $q_0+r_0=2\cdot k$ și cum $q_0-r_0\leq 1$ rezultă imediat $q_0=r_0=k$.

Rezultă că în acest caz maximul căutat este: $2\cdot\left(k^2+k^2+k^2\right)=6\cdot k^2=\dfrac{2\cdot n^2}{3}$

II. $n=3\cdot k+1$

Asemănător deducem $p_0\geq k+1$. Dacă am avea $p_0\geq k+2$ atunci $q_0+r_0\leq 2\cdot k-1\Rightarrow r_0\leq k-1\Rightarrow p_0-r_0\geq 2$ contradicţie; Deci $p_0=k+1$ și atunci din $q_0+r_0=2\cdot k$ și $q_0-r_0\leq 1$ rezultă $q_0=r_0=k$. Astfel în acest caz maximul căutat este:

$$2\cdot\left[(k+1)\cdot k+(k+1)k+k^2\right]=2\cdot\left(3\cdot k^2+2\cdot k\right)=2\cdot\left[3\cdot\left(\frac{n-1}{3}\right)^2+2\cdot\frac{n-1}{3}\right]=2\cdot\frac{n^2-1}{3}$$

III. $n=3\cdot k+2$

Rezultă mai întâi $p_0\geq k+1$. Dacă am avea $p_0\geq k+2$ atunci $q_0+r_0\leq 2\cdot k\Rightarrow r_0\leq k\Rightarrow p_0-r_0\geq 2$ contradicţie;

Deci $p_0=k+1$ și atunci din $q_0+r_0=2\cdot k+1$ și $q_0-r_0\leq 1$ rezultă $q_0=k+1, r_0=k$. Astfel în acest caz maximul căutat este:

$$2\cdot\left[(k+1)\cdot(k+1)+(k+1)\cdot k+(k+1)\cdot k\right]=2\cdot(k+1)\cdot(3\cdot k+1)=2\cdot\left(\frac{n-2}{3}+1\right)\cdot\left(3\cdot\frac{n-2}{3}+1\right)=2\cdot\frac{n^2-1}{3}$$

Rezumând deducem că numărul maxim de termeni nenuli din suma considerată este egal cu $\dfrac{2\cdot n^2}{3}$ dacă n se divide cu 3, respectiv cu $2\cdot\dfrac{n^2-1}{3}$, dacă n nu se divide cu 3.

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri"**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude"
ediţia a XIV-a
Galaţi , 26 octombrie 2013

Clasa a XI-a

BAREM DE CORECTARE NOTARE

Problema 1

a) Trecerea $n \to n+1$ în recurenţă şi scăderea relaţiilor 1p
Obţinerea periodicităţii şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ şi nemonotonia 1p
$\frac{1+x_n}{2+x_{n+1}} \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, 2\}$ 1p

Margine inf. şi sup. 1p

b) Condiţia de existenţă $x>0$ şi eliminarea cazului $x \in (0,1)$ 1p
Notaţia $x = 3^k \cdot 3^\alpha, k \in \mathbb{N}, \alpha \in [0,1)$ şi $x \cdot [x] \geq 3^{2\cdot k} = 3^{2\cdot[\log_3 x]} = 9^{[\log_3 x]}$ 1p
Finalizare..1p

Problema 2

Analiza caz $x, y, z \in (0, \infty)$ şi notarea $x = tg\alpha, y = tg\beta, z = tg\gamma$ 1p
$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ 1p
$\frac{\sin 2\cdot\alpha}{5} = \frac{\sin 2\cdot\beta}{6} = \frac{\sin 2\cdot\gamma}{7}$ 1p
Alegerea ΔMNP 1p
$tg\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}, tg\beta = \frac{2\cdot\sqrt{6}}{9}, tg\gamma = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 1p
Analogia cazului $x, y, z \in (-\infty, 0)$ şi obţinerea soluţiilor negative..............................1p
Finalizare..1p

Problema 3

Partiţia mulţimii $M = M_a \cup M_b \cup M_c$ 1p
Descoperirea termenilor nenuli pentru
$(i, j) \in (M_a \times M_b) \cup (M_a \times M_c) \cup (M_b \times M_a) \cup (M_b \times M_c) \cup (M_c \times M_a) \cup (M_c \times M_b)$ 1p
Calculul numărului termenilor nenuli $2 \cdot \left(|M_a| \cdot |M_b| + |M_a| \cdot |M_c| + |M_b| \cdot |M_c|\right)$ 1p
Observaţia că două numere din tripletul (p_0, q_0, r_0) ce maximizează numărul termenilor nenuli trebuie să aibă modulul diferenţei cel mult egal cu 1............................1p
Analiza cazului $n = 3 \cdot k$ și obţinerea numărului maxim de termeni nenuli $\frac{2 \cdot n^2}{3}$ 1p
Analiza cazurilor $n = 3 \cdot k + 1, n = 3 \cdot k + 2$ și obţinerea numărului maxim de termeni nenuli $2 \cdot \frac{n^2 - 1}{3}$ 1p
Finalizare..1p