Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri"**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude"
ediţia a XIV-a
Galaţi, 26 octombrie 2013

Clasa a XII -a

Problema 1..

a) Fie $a \in (1,+\infty)$ şi funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $\ln\left(f^2(x)+1\right)+a\cdot f(x)=x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Să se demonstreze că funcţia f admite primitive.

Mihai Dragoş Totolici, profesor, Galaţi

b) Pe mulţimea M se defineşte o operaţie notată multiplicativ, cu proprietatea $x\cdot(y\cdot x)=y,\ \forall x, y \in M$. Să se demonstreze că fiecare din ecuaţiile $a\cdot x=b$ şi $x\cdot a=b$, unde $a, b \in M$, au soluţie unică în M.

(***)

Problema 2..

Fie f şi g două funcţii, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care satisfac relaţiile :

$$f(x+y)+f(x-y)=2\cdot f(x)\cdot g(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$g(x-y)-g(x+y)=2\cdot f(x)\cdot f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Ştiind că f este o funcţie neidentic nulă, să se demonstreze că:

a) Funcţia f este periodică dacă şi numai dacă funcţia g este periodică şi în acest caz mulţimile perioadelor sunt egale.

b) Dacă există $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$, iar f este continuă, atunci funcţiile f şi g sunt derivabile şi $f'=g$, $g'=-f$.

Vasile Popa, profesor, Galaţi

Problema 3

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie convexă.

a) Demonstraţi că f este continuă.

b) Demonstraţi că există o funcţie $g:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, unic determinată, astfel încât $f\left(x+g(x)\right)=f\left(g(x)\right)-g(x)$, pentru orice $x\geq 0$.

(***)

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XIV-a
Galaţi, 26 octombrie 2013

Clasa a XII-a

SOLUŢII

Problema 1.

Soluţie. a) Funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\ln\left(x^2+1\right)+a\cdot x$ are derivate

$$g'(x)=\frac{2\cdot x}{x^2+1}+a=\frac{a\cdot x^2+2\cdot x+a}{x^2+1},\forall x\in\mathbb{R}.$$

Numărătorul are $\Delta=4-4\cdot a^2<0,$ pentru $a\in(1,+\infty)$, deci $a\cdot x^2+2\cdot x+a>0,\forall x\in\mathbb{R}$ şi $a\in(1,+\infty)$.

Obţinem astfel $g'(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, deci g este strict crescătoare.

Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=+\infty$, iar g este strict crescătoare rezultă că g este bijectivă, deci şi inversabilă.

Din ipoteză avem că $g\left(f(x)\right)=x,\forall x\in\mathbb{R}$ şi ţinând cont că g este inversabilă rezultă că $g^{-1}=f$.

Cum g este continuă rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive.

b) Pentru $x=a$ şi $y=b$ în relaţia din enunţ rezultă că $a\cdot(b\cdot a)=b$, ceea ce arată că $b\cdot a$ este soluţie a ecuaţiei $a\cdot x=b$. Fie c o soluţie a acestei ecuaţii, deci $a\cdot c=b\quad(1)$

Dacă în condiţia impusă în enunţ punem, $x=c$ şi $y=a$ deducem $c\cdot(a\cdot c)=a$ şi deci conform cu (1), rezultă $c\cdot b=a\quad(2)$.

Pentru $x=b$ şi $y=c$ în relaţia din enunţ rezultă că $b\cdot(c\cdot b)=c$ şi dacă ţinem seama de (2), deducem $b\cdot a=c$, iar aceasta ne arată că unica soluţie a ecuaţiei $a\cdot x=b$ este $c=b\cdot a$.

Demonstrăm că $(x\cdot y)\cdot x=y,\forall x,y\in M\qquad(3)$

Înlocuind în relaţia din enunţ pe x cu $x\cdot y$ rezultă că $(x\cdot y)\cdot\left(y\cdot(x\cdot y)\right)=y\qquad(4)$

şi dacă ţinem seama că $y\cdot(x\cdot y)=x$, din (4) deducem relaţia (3).

Folosind relaţia (3) şi procedând ca şi pentru ecuaţia $a\cdot x=b$, se demonstrează că ecuaţia $x\cdot a=b$ are o soluţie unică $a\cdot b$.

Problema 2.

Soluţie. a) Pentru $y=0$ în relaţia (1), avem $2\cdot f(x)=2\cdot f(x)\cdot g(0),\forall x\in\mathbb{R}$. Cum f este neidentic nulă rezultă că $g(0)=1$.

Din relaţia (2), pentru $y=0$, obţinem $0=2\cdot f(x)\cdot f(0),\forall x\in\mathbb{R}$, care implică $f(0)=0$.

Luând $x=0$ în relaţia (1), avem $f(y)+f(-y)=0,\forall y\in\mathbb{R}$, adică f funcţie impară.

Pentru $x=0$ în relaţia (2), avem $g(-y)-g(y)=0,\forall y\in\mathbb{R}$, deci funcţia g este pară.

Schimbând x şi y între ele în relaţia (1) rezultă că $f(x+y)+f(y-x)=2\cdot f(y)\cdot g(x),\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Adunând cu relația (1), obținem relația (3): $f(x+y)=f(x)\cdot g(y)+f(y)\cdot g(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$
Demonstrăm implicația directă :
Admitem că f este periodică şi considerăm T o perioadă a sa: $f(x+T)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

Deoarece $f(0)=0$ rezultă că $f(T)=0$.

În relația (3), luăm $y=T$ şi rezultă $f(x)=f(x)\cdot g(T),\forall x\in\mathbb{R}$, adică $g(T)=1$.

Pentru $x=y$, în relațiile (3), respectiv (2) obținem relațiile:

(4): $f(2\cdot x)=2\cdot f(x)\cdot g(x),\forall x\in\mathbb{R}$

(5): $g(2\cdot x)=1-2\cdot f^2(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$

Din relația (5), pentru $x=\frac{T}{2}$ obținem $g(T)=1-2\cdot f^2\left(\frac{T}{2}\right)$, de unde $f\left(\frac{T}{2}\right)=0$.

În relația (2) trecem x în $x+\frac{T}{2}$ şi y în $\frac{T}{2}$ şi rezultă $g(x)=g(x+T),\forall x\in\mathbb{R}$.

Demonstrăm reciproca:
Presupunem că g este periodică şi T este o perioadă a sa.
Deci $g(x+T)=g(x),\forall x\in\mathbb{R}$, de unde $g(T)=1$.

Pentru $x=T$ în relația (5), avem că $g(2\cdot T)=1-2\cdot f^2(T)$, de unde rezultă $f(T)=0$.

Din relația (3), pentru $y=T$ obținem $f(x+T)=f(x)\cdot g(T)+f(T)\cdot g(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Din modul de demonstrație rezultă că mulțimile perioadelor sunt egale.
b) Fie $x_0\in\mathbb{R}$

Avem $R(f;\,x_0;\,h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\dfrac{f(x_0)\cdot g(h)+f(h)\cdot g(x_0)-f(x_0)}{h}$

$$R(f;\,x_0;\,h)=f(x_0)\frac{g(h)-1}{h}+\frac{f(h)}{h}\cdot g(x_0)$$

Ținând cont de relația (5) rezultă că

$$R(f;\,x_0;\,h)=f(x_0)\frac{-2\cdot f^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h}+\frac{f(h)}{h}\cdot g(x_0)$$

$\lim\limits_{h\to 0}R(f;x_0;h)=g(x_0)$. Deci $f'(x_0)=g(x_0)$.

$$R(g;\,x_0;\,h)=\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=\frac{-2\cdot f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot f\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

Deoarece f este continuă în x_0 rezultă că $\lim\limits_{h\to 0}R(g;x_0;h)=-f(x_0)$, adică $g'(x_0)=-f(x_0)$.

Problema 3

Soluție. a) Fie $a_1<a_2<x<a<a_3$. Din convexitate rezultă

$\dfrac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}\le\dfrac{f(a)-f(x)}{a-x}\le\dfrac{f(a_3)-f(a)}{a_3-a}$, deci

$(a-x)\dfrac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1} \le f(a)-f(x) \le (a-x)\dfrac{f(a_3)-f(a)}{a_3-a}$, de unde $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=f(a)$.

Analog $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=f(a)$.

b) Ceea ce se cere este echivalent cu faptul că $f(a+x)-f(x)=-x$,ca ecuație în x, admite o soluție unică $g(a)$ pentru orice $a\ge 0$. Să definim $f_a(x)=f(a+x)-f(x)$ pentru $a\ge 0$.

Demonstrăm că f_a este monoton crescătoare:

1) Fie $x_1<x_1+a<x_2<x_2+a$, $a>0$. Cum f este convexă rezultă
$\dfrac{f(x_1+a)-f(x_1)}{a} \le \dfrac{f(x_2+a)-f(x_2)}{a}$, de unde $f_a(x_2)\ge f_a(x_1)$
2) Fie $x_1<x_2<x_1+a<x_2+a$. Cum f este convexă rezultă
$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \dfrac{f(x_2+a)-f(x_1+a)}{x_2-x_1}$, de unde $f_a(x_2)\ge f_a(x_1)$

Deci f_a este monoton crescătoare.

Ecuația devine $f_a(x)+x=0,\ a\ge 0$. Definim $h_a(x)=f_a(x)+x$ pentru $a\ge 0$.

Demonstrăm că ecuația $h_a(x)=0$ are soluție în intervalul $\left[-\left|f_a(0)\right|;\left|f_a(0)\right|\right]$.

Avem $h_a\left(-\left|f_a(0)\right|\right)=f_a\left(-\left|f_a(0)\right|\right)+\left(-\left|f_a(0)\right|\right)\le f_a(0)-\left|f_a(0)\right|\le 0$ şi

$h_a\left(\left|f_a(0)\right|\right)=f_a\left(\left|f_a(0)\right|\right)+\left(\left|f_a(0)\right|\right)\ge f_a(0)+\left|f_a(0)\right|\ge 0$

Cum h_a este continuă, ea se anulează în cel puțin un punct x_a.

Soluția va fi unică deoarece dacă presupunem că $x_1<x_2$ sunt soluții, avem

$0=f_a(x_1)+x_1=f_a(x_2)+x_2$, deci $0\le f_a(x_2)-f_a(x_1)=x_1-x_2<0$, absurd.

Aşadar, soluția unică x_a determină, în mod unic funcția g.

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri"**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude"
ediţia a XIV-a
Galaţi, 26 octombrie 2013

Clasa a XII-a

BAREM DE CORECTARE NOTARE

Problema 1

a) Alegerea funcţiei g şi demonstrarea monotoniei acesteia………………….........…1 punct
Demonstrarea bijectivităţii funcţiei g..1 punct
Finalizare...1 punct
b) Determinarea soluţiei $b \cdot a$ a ecuaţiei $a \cdot x = b$ ……………………………………….1 punct
Demonstrarea unicităţii soluţiei ecuaţiei $a \cdot x = b$ ……………………….....……1 punct
Demonstrarea relaţiei $(x \cdot y) \cdot x = y, \forall x, y \in M$ …………………………………..1 punct
Finalizare………………………………………………………………………....1 punct

Problema 2

a) Demonstrarea relaţiei . (3): $f(x+y) = f(x) \cdot g(y) + f(y) \cdot g(x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ....2 puncte
Demonsrarea implicaţiei directe...2 puncte
Demonstrarea reciprocei...1 punct
b) Justificare $f' = g$ ....1 punct
Justificare $g' = -f$ ....1 punct

Problema 3

a) Obţinerea $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$ ……………………………..………….......................2 puncte
Finalizare……………………………....……………………………………………...1 punct
b) Demonstrarea monotoniei funcţiei $f_a(x) = f(a+x) - f(x)$ pentru $a \geq 0$ ....2 puncte
Demonstrarea existenţei unei soluţii a ecuaţiei în x: $f_a(x) + x = 0,\ a \geq 0$ …………..1 punct
Finalizare…………..…………………………………………………………....1 punct