

EVALUARE ÎN EDUCAȚIE
MATEMATICĂ
Etapa I – 19.10.2013

Numele și Prenumele	
Școala	

Clasa a XII-a 4 ore

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.



SUBIECTUL I. (48 de puncte) Încercuțiți răspunsul corect.

- 8 p** 1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cu elemente reale. Matricea A^3 este egală cu:
- A.** $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 B. $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
 D. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 E. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
- 8 p** 2. Determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ este egal cu:
- A.** -15
 B. 5
 C. -5
 D. 0
 E. 3
- 8 p** 3. Cât este $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n)$?
- A.** 0
 B. $-\infty$
 C. ∞
 D. 1
 E. $-\frac{1}{2}$
- 8 p** 4. Cât este $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$?
- A.** 1
 B. 2
 C. $\frac{1}{2}$
 D. ∞
 E. $-\infty$
- 8 p** 5. Derivata funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x+1)^4$ este egală cu:
- A.** $(x+1)^3$
 B. $(4x+1)^3$
 C. $4(x+1)^3$
 D. $3(x+1)^4$
 E. $4x^3 + 12x^2 + 1$
- 8 p** 6. Cât este $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$?
- A.** 1
 B. $\frac{1}{2}$
 C. $-\frac{1}{2}$
 D. 2
 E. 0

SUBIECTUL II. (30 de puncte)

Scrieți informația corectă care completează spațiile punctate.

1. Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cu elemente reale.
- 5 p a) Rangul matricei $B = A + I_3$ este egal cu
- 5 p b) Suma elementelor matricei $C = A^3 - I_3$ este egală cu
- 5 p c) Inversa matricei A este egală cu
2. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x + 5$.
- 5 p a) Derivata a doua a funcției f este $f''(x) = \dots$.
- 5 p b) Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(0,5)$ este $y = \dots$.
- 5 p c) Mulțimea punctelor de extrem local ale funcției f este $\{\dots, \dots\}$.

SUBIECTUL III. (12 puncte)

Scrieți rezolvările complete.

1. Fie M mulțimea matricelor de forma $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.
- 2 p a) Arătați că $X \in M$ dacă și numai dacă $AX = XA$.
- 2 p b) Rezolvați în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ecuația $X^2 = A$.
- 2 p c) Câte soluții are ecuația $X^4 = A$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?
2. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x$.
- 2 p a) Determinați ecuația asimptotei graficului funcției f la ∞ .
- 2 p b) Arătați că funcția f este descrescătoare.
- 2 p c) Calculați $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Punctaj: 100 de puncte.

EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

MATEMATICĂ

Etapa I – 19.10.2013

Barem de corectare și notare

Clasa a XII-a 4 ore

Subiectele I și II

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă punctajul maxim prevăzut în dreptul fiecărei cerințe, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. Item	I.1.	I.2.	I.3.	I.4.	I.5.	I.6
Răspunsul	D	C	A	C	C	B

Nr. Item	II.1a	II.1b	II.1c	II.2a	II.2b	II.2c
Răspunsul	3	0	$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	6x	-3x+5	-1;1

Subiectul III

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

1.	<p>a) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Relația $AX = XA$ este echivalentă cu $b = c = d = e = f = g = h = 0$, (1p) de unde rezultă cerința. (1p)</p> <p>b) Fie $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu $X^2 = A$. Atunci $AX = XA$, deci $X \in M$. Fie $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. (1p)</p> <p>Atunci $X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = A \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 2 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 3 \end{pmatrix}$, care verifică ecuația. (1p)</p> <p>c) Ca mai sus, ecuația are soluțiile $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, cu $a^4 = 1, b^4 = 4, c^4 = 9$. (1p)</p> <p>Obținem 64 de soluții. (1p)</p>
----	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

2. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}+x} = 1. \text{ (1p)}$

Ecuția asimptotei graficului funcției f la ∞ este $y=1. \text{ (1p)}$

b) $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} - 1. \text{ (1p)}$

Funcția f este descrescătoare deoarece $x+1 < \sqrt{x^2+2x+3} \Rightarrow f' < 0. \text{ (1p)}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{\frac{x^2+2x+3}{x^2}} - 1 \right) \text{ (1p)} = -2. \text{ (1p)}$

- **Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.**