Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătaţi că numărul $x=3(1-i)+3i$ este real.

5p **2.** Calculaţi distanţa dintre punctele de intersecţie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$ cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x+3}=8$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulţimea $A=\{1,2,3,...,20\}$, acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,3)$, $B(3,0)$ şi $C(2,5)$. Calculaţi lungimea medianei din B a triunghiului ABC.

5p **6.** Determinaţi lungimea laturii AC a triunghiului ABC, ştiind că $BC=4$, $B=\frac{\pi}{6}$ şi $C=\frac{\pi}{3}$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x & 1-x \\ 1-x & x \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det(M(2))$.

5p **b)** Verificaţi dacă $M(x)\cdot M(y)=M(2xy-x-y+1)$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Determinaţi numărul real a astfel încât $M(a)\cdot M(x)=M(a)$, pentru orice număr real x.

2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x\circ y=xy+2x+2y+2$.

5p **a)** Calculaţi $0\circ(-2)$.

5p **b)** Arătaţi că $x\circ y=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x\circ x=6$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.

5p **c)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$.

5p **b)** Arătaţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$ este o primitivă a funcţiei f.

5p **c)** Calculaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=1$ şi $x=4$.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3(1-i)=3-3i$ $x=3\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
2.	$f(x)=0\Rightarrow x=1$ sau $x=2$ Distanţa este egală cu 1	**3p** **2p**
3.	$2x+3=3$ $x=0$	**3p** **2p**
4.	Numerele din mulţimea A divizibile cu 4 sunt 4, 8, 12, 16 şi $20\Rightarrow 5$ cazuri favorabile Numărul de elemente ale mulţimii A este $20\Rightarrow 20$ de cazuri posibile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{1}{4}$	**2p** **1p** **2p**
5.	Mijlocul segmentului (AC) este $M(0,4)$ $BM=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$	**2p** **3p**
6.	$A=\dfrac{\pi}{2}$ $AC=\dfrac{1}{2}\cdot BC=2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(M(2))=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=$ $=4-1=3$	**2p** **3p**
b)	$M(x)\cdot M(y)=\begin{pmatrix}xy+(1-x)(1-y) & x(1-y)+(1-x)y\\ (1-x)y+x(1-y) & (1-x)(1-y)+xy\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}2xy-x-y+1 & 1-(2xy-x-y+1)\\ 1-(2xy-x-y+1) & 2xy-x-y+1\end{pmatrix}=M(2xy-x-y+1)$, pentru orice numere reale x şi y	**3p** **2p**
c)	$M(a)\cdot M(x)=M(a)\Leftrightarrow M(2ax-a-x+1)=M(a)$, pentru orice număr real x $2ax-a-x+1=a$, pentru orice număr real x $a=\dfrac{1}{2}$	**1p** **2p** **2p**
2.a)	$0\circ(-2)=0\cdot(-2)+2\cdot 0+2\cdot(-2)+2=$ $=-2$	**3p** **2p**
b)	$x\circ y=xy+2x+2y+2=x(y+2)+2(y+2)-2=$ $=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x şi y	**3p** **2p**
c)	$x\circ x\circ x=(x+2)^3-2$ $(x+2)^3-2=6\Rightarrow x=0$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x-2)(x-1)-\left(x^2-2x+2\right)}{(x-1)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Rightarrow x(x-2)=0\Rightarrow x=2$, deoarece $x\in(1,+\infty)$	**2p**
	$f'(2)=0$; $f'(x)<0$, pentru $x\in(1,2)$ şi $f'(x)>0$, pentru $x\in(2,+\infty)$	**2p**
	Punctul de extrem este $x=2$	**1p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=-1$	**2p**
	Ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f este $y=x-1$	**1p**
2.a)	$\int_1^2\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\int_1^2 xdx=$	**2p**
	$=\left.\dfrac{x^2}{2}\right\|_1^2=\dfrac{3}{2}$	**3p**
b)	$F'(x)=\left(\dfrac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}}\right)'=x^{\frac{3}{2}}=x\sqrt{x}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow F$ este o primitivă a funcţiei f	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^4\left\|f(x)\right\|dx=\int_1^4 x\sqrt{x}dx=$	**2p**
	$=\left.\dfrac{2}{5}\cdot x^2\sqrt{x}\right\|_1^4=\dfrac{62}{5}$	**3p**