Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_1 = 2$ și $a_3 = 8$.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3 x = \log_3(4-x)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ și $B(4,1)$. Determinați coordonatele punctului M știind că $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Arătați că $4\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = 1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & m+1 \\ 2 & m+1 & 2 \\ m+1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați $\det(A(-1))$.

5p **b)** Verificați dacă $A(0)\cdot A(1) = 5A(1)$.

5p **c)** Determinați numerele reale m pentru care $\det(A(m)) = 0$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă dată de $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$.

5p **a)** Verificați dacă $x \circ y = (x-2)(y-2) + 2$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $x \circ 2 = 2 \circ x = 2$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Calculați $1 \circ 2 \circ 3 \circ \ldots \circ 2012 \circ 2013$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x}$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{f(x)}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1 = \frac{e-2}{e}$.

5p **b)** Verificați dacă $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Arătați că $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$S_3=\frac{(a_1+a_3)\cdot 3}{2}=\frac{(2+8)\cdot 3}{2}=$ $=15$	**3p** **2p**
2.	$x_V=2$ $y_V=-2$	**2p** **3p**
3.	$x=4-x$ Rezultă $x=2$, care verifică ecuaţia	**3p** **2p**
4.	Numerele de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 4 sunt 14, 22 şi 41 $\Rightarrow$ 3 cazuri favorabile Numărul de numere naturale de două cifre este 90 $\Rightarrow$ 90 de cazuri posibile $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{1}{30}$	**2p** **1p** **2p**
5.	$\overrightarrow{AB}=3\vec{i}$ şi $\overrightarrow{AM}=(x_M-1)\vec{i}+(y_M-1)\vec{j}$ $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\begin{cases}x_M=2\\y_M=1\end{cases}$	**2p** **3p**
6.	$4\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=2\sin\frac{\pi}{6}=$ $=2\cdot\frac{1}{2}=1$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-1)=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&0&2\\0&2&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(-1))=\begin{vmatrix}2&2&0\\2&0&2\\0&2&2\end{vmatrix}=$ $=0+0+0-0-8-8=-16$	**2p** **3p**
b)	$A(0)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&1&2\\1&2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}10&10&10\\10&10&10\\10&10&10\end{pmatrix}=5A(1)$	**2p** **3p**
c)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}2&2&m+1\\2&m+1&2\\m+1&2&2\end{vmatrix}=-(m+5)(m-1)^2$ $\det(A(m))=0\Leftrightarrow m=-5$ sau $m=1$	**3p** **2p**

2.a)	$xy-2x-2y+6=x(y-2)-2(y-2)+2=$	**3p**
	$=(x-2)(y-2)+2$, pentru orice numere reale x şi y	**2p**
b)	$x\circ 2=(x-2)(2-2)+2=2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$2\circ x=(2-2)(x-2)+2=2\Rightarrow x\circ 2=2\circ x=2$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2012\circ 2013=(1\circ 2)\circ 3\circ\ldots\circ 2012\circ 2013=$	**3p**
	$=2\circ(3\circ\ldots\circ 2012\circ 2013)=2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(x^3-1)'(x^2+1)-(x^3-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3-1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^4+3x^2+2x}{(x^2+1)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=$	**3p**
	$=0$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1$	**1p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{2}{x-1}\cdot\frac{x^3-1}{x^2+1}}=$	**2p**
	$=e^2$	**2p**
2.a)	$I_1=\int_0^1 xe^{-x}dx=-xe^{-x}\Big\|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=$	**3p**
	$=-\dfrac{1}{e}-e^{-x}\Big\|_0^1=\dfrac{e-2}{e}$	**2p**
b)	$I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx=-x^{n+1}e^{-x}\Big\|_0^1+(n+1)\int_0^1 x^n e^{-x}dx=$	**3p**
	$=-\dfrac{1}{e}+(n+1)I_n$	**2p**
c)	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi pentru orice $x\in[0,1]$ avem $0<e^{-x}\le 1\Rightarrow 0\le x^n e^{-x}\le x^n$	**2p**
	$0\le\int_0^1 x^n e^{-x}dx\le\int_0^1 x^n dx\ \Rightarrow\ 0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}$	**3p**