Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali, ştiind că $b_1 = 1$ şi $b_4 = 27$.

5p **2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+2} = 9^{1-x}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.

5p **5.** Se consideră punctele A, B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Calculaţi sinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB = 4$, $BC = 5$ şi $\sin C = \frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & 0 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(1))$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale m știind că $A(m)\cdot A(-m) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Arătaţi că $\det(A(1) + A(2) + \ldots + A(101)) = -51^2 \cdot 101^3$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x \circ y = xy - 4x - 4y + 20$.

5p **a)** Calculaţi $3 \circ 4$.

5p **b)** Arătaţi că $x \circ y = (x-4)(y-4) + 4$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{x \text{ de } 2013 \text{ ori}} = 5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x + e^x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(x+e^x)^2}$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x) \geq \frac{e}{e+1}$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x e^{-nx^2}\,dx$.

5p **a)** Calculaţi I_0.

5p **b)** Arătaţi că $I_{n+1} \leq I_n$, pentru orice număr natural n.

5p **c)** Demonstraţi că $I_n = \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{e^n}\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_4 = b_1 q^3 \Rightarrow q^3 = 27$ $q = 3$	**3p** **2p**
2.	$x_V = 3$ $y_V = -1$	**2p** **3p**
3.	$3^{x+2} = 3^{2(1-x)} \Rightarrow x + 2 = 2 - 2x$ $x = 0$	**3p** **2p**
4.	Numerele de două cifre, pătrate perfecte, sunt 16, 25, 36, 49, 64 şi 81 $\Rightarrow$ 6 cazuri favorabile Numărul de numere naturale de două cifre este 90 $\Rightarrow$ 90 de cazuri posibile $p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{1}{15}$	**2p** **1p** **2p**
5.	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$ $AC = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$	**3p** **2p**
6.	$\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A}$ $\sin A = 1$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= -1$	**2p** **3p**
b)	$A(m) \cdot A(-m) = \begin{pmatrix} 1-2m & 1 & 1-m \\ m & m & m \\ m-m^2 & m & m-m^2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1-2m & 1 & 1-m \\ m & m & m \\ m-m^2 & m & m-m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m = 1$	**3p** **2p**
c)	$A(1) + A(2) + \ldots + A(101) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 101 & 0 & 0 \\ 101 & 0 & 101 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 101 & 101 & 101 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 0 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 101 \cdot 51 \end{pmatrix}$ $\det(A(1) + A(2) + \ldots + A(101)) = \begin{vmatrix} 101 & 101 & 101 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 0 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 101 \cdot 51 \end{vmatrix} = -51^2 \cdot 101^3$	**3p** **2p**

2.a)	$3\circ 4=3\cdot 4-4\cdot 3-4\cdot 4+20=$	**3p**
	$=4$	**2p**
b)	$x\circ y=x(y-4)-4(y-4)+4=$	**3p**
	$=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x şi y	**2p**
c)	$x\circ x=(x-4)^2+4$	**1p**
	$\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{x \text{ de } 2013 \text{ ori}}=(x-4)^{2013}+4$	**2p**
	$(x-4)^{2013}+4=5\Rightarrow x=5$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{e^x\left(x+e^x\right)-e^x\left(1+e^x\right)}{\left(x+e^x\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{(x-1)e^x}{\left(x+e^x\right)^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x+e^x}=1$	**3p**
	Ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f este $y=1$	**2p**
c)	$f'(1)=0$; $f'(x)\le 0$, pentru $x\in(0,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru $x\in[1,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\ge f(1)\Rightarrow f(x)\ge\dfrac{e}{e+1}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$I_0=\int_0^1 x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}$	**2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1 xe^{-nx^2}\left(e^{-x^2}-1\right)dx$	**2p**
	Pentru orice $n\in\mathbb{N}$ şi $x\in[0,1]$ avem $e^{-nx^2}>0$ şi $e^{-x^2}-1\le 0\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$	**3p**
c)	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem $I_n=\int_0^1 xe^{-nx^2}dx=-\dfrac{1}{2n}\int_0^1\left(e^{-nx^2}\right)'dx=$	**3p**
	$=-\dfrac{1}{2n}e^{-nx^2}\Big\|_0^1=\dfrac{1}{2n}\left(1-\dfrac{1}{e^n}\right)$	**2p**