MATEMÁTICA PARTE 1

01. Un número de cuatro cifras en base 7 se representa en base decimal por $\overline{49d}$. Calcule el valor máximo de la suma de las cifras de dicho número.
A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

02. Sean n, m $\in$ Z, tal que n+m y n-m son los menores cuadrados perfectos distintos. Si n=2m+1, calcule el valor de 3m-n
A) -1 B) 0 C) 1
D) 4 E) 7

03. Jorge decide montar un gimnasio y utiliza 5000 nuevos soles para comprar 40 aparatos entre bicicletas, colchonetas y máquinas de remo. Si los precios unitarios son 150; 80; 300 nuevos soles, respectivamente, ¿cuántos aparatos entre bicicletas y máquinas de remo compra?
A) 15 B) 16 C) 20
D) 24 E) 25

04. Se tienen las siguientes afirmaciones:
I. Dos enteros no nulos a y b son primos entre sí, si y solo si existen enteros m y n, tal que ma+nb=1.
II. Sean a y b dos enteros positivos, entonces a y (ab+1) son primos entre sí.
III. Si a y b son primos entre sí, entonces ab y (a^n+b^m) son primos entre sí, donde m y n son enteros positivos.

¿Cuál de las alternativas es la correcta?
A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) Sólo I y II E) I, II y III

05. Halle la suma de los siguientes números:

$$n_1=1{,}3125,\ n_2=\frac{21}{16},\ n_3=1{,}\overset{\frown}{36}$$

$$n_4=1+\frac{3}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{5}{10^4}$$

A) $\frac{322}{111}$ B) $\frac{647}{113}$ C) $\frac{787}{147}$
D) $\frac{933}{176}$ E) $\frac{987}{147}$

06. Si N y M son dos números enteros de tres cifras de manera que el primero más sus dos quintas partes es un cubo perfecto, al segundo se le suma su mitad para formar un cuadrado perfecto y además M+N<500, entonces el mayor valor de M+N es:
A) 315 B) 361 C) 395
D) 461 E) 495

07. Un producto se vende al mismo precio en dos tiendas.
a) En la tienda X, se hacen descuentos sucesivos, primero del 15% luego del 15% y finalmente del 20%.
b) En la tienda Y se hacen descuentos sucesivos del 10% y luego del 40%.

El dueño desea vender el producto en ambas tiendas al mayor precio.

Determine la tienda en la que se debe incrementar el precio y en cuánto. Dar la respuesta más próxima.
A) X; 7,03%
B) X; 7,04%
C) Y; 7,03%
D) Y; 7,04%
E) Y; 7,40%

08. En un experimento se obtuvieron n datos a_1, a_2 , ..., a_n . Una persona calcula el promedio M_1 sobre los n datos obtenidos, una segunda persona observa que en el caso anterior olvidaron sumar el dato a_i y vuelve a calcular el promedio M_2 sobre los datos obtenidos; pero una tercera persona nota que esta segunda persona olvidó sumar en esta ocasión el dato a_k. Si además se sabe que $a_i+a_k=N$, determine el verdadero promedio

A) $\frac{n(M_1-M_2)+N}{2n}$

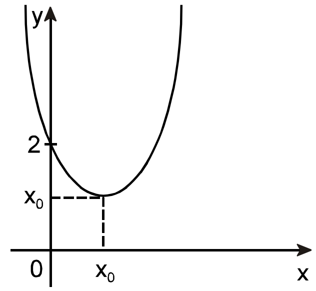
B) $\frac{n(M_2-M_1)+N}{2n}$

C) $\frac{n(M_1+M_2)-N}{2n}$

D) $\frac{n(M_1-M_2)-N}{2n}$

E) $\frac{n(M_1+M_2)-N}{2n}$

09. Dada la gráfica de la función cuadrática f, halle el valor de x_0, sabiendo que f tiene el coeficiente del término de mayor grado igual a uno.



A) 1/4 B) 1/2 C) 3/4
D) 1 E) 3/2

10. Halle el cociente al dividir:
$P(x) = 3x^4 + x^3 + x^2 + x - 2$
entre (x + 1)(x - 2/3)
A) $2(x^2 - 1)$ B) $3(x^2 + 2x)$
C) $4(x^2 + 4)$ D) $3(x^2 + 1)$
E) $3(x^2 - 2)$

11. Sean p, q, r proposiciones lógicas. Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F):
I. Si $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ y $(p \vee q) \rightarrow r$ son verdaderas, entonces r es verdadera.
II. $p \rightarrow q$ y $p \wedge \sim q$ son proposiciones equivalentes.
III. Si $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ y $\sim r \rightarrow q$ son proposiciones falsas, entonces p es verdadera.
A) VVV B) VVF C) VFF
D) FVF E) FFF

12. Considerando $m \neq 0$, halle la suma de las soluciones de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} a & m & b \\ a & m & x \\ x & m & b \end{vmatrix} = 0; \text{ con a, b datos}$$

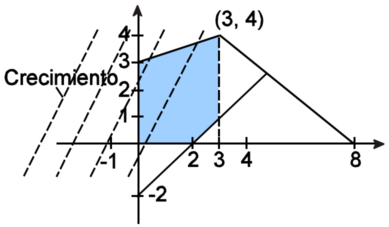
A) a - b B) b - a C) a + b
D) 2a + b E) a + 2b

13. Sea A una matriz cuadrada de orden 2×2. Si se sabe que su determinante es Δ y la traza de la matriz A^2 es T, determine el valor $[\text{traza}(A)]^2$.
A) $T + \Delta$ B) $T^2 + 2\Delta$
C) $2\Delta + T$ D) $\Delta + 2T$
E) $\Delta^2 + 2T$

14. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y sea $a \in \mathbb{R}$. Si f satisface:
$|a - 2|\,(f(x))^2 - a^2 f(x) \leq |f(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Determine el conjunto de todos los valores de a que garantizan que la función f sea acotada.
A) {2} B) {4} C) $\mathbb{R}\backslash\{2\}$
D) $\mathbb{R}\backslash\{4\}$ E) $\mathbb{R}$

15. Sean a, b, c $\in \mathbb{R}$ tales que $0 < b < 1$ y $a < c$, determine los valores de verdad o falsedad de las siguientes proposiciones señalando la alternativa correcta:
I. $b^a > b^c$
II. $\text{Log}_b(a) > c$, si $a > b^c$
III. $\text{Log}_b(a) > \text{Log}_b(c)$
A) VVV B) VFV C) VFF
D) FFV E) FVF

16. La región admisible S y el crecimiento de la función objetivo del problema,
maximizar f(x, y)
s.a. $(x, y) \in S$
se muestra en la siguiente figura:



Si $(\bar{x}, \bar{y})$ es la solución del problema, determine $f(\bar{x}, \bar{y})$
A) $\frac{10}{3}$ B) $\frac{14}{3}$ C) $\frac{20}{3}$
D) $\frac{25}{3}$ E) $\frac{28}{3}$

17. El conjunto solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas x, y, z es:
$\left\{(x,y,z) \,/\, \frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}\right\}$. Si el punto (3, -2, 5) pertenece al plano cuya ecuación lineal es una de las ecuaciones del sistema, y tiene la forma ax + by + cz = 15, determine dicha ecuación.
A) 23x + y - 11z = 15
B) -23x - y - 22z = 11
C) -23x - 13y - 22z = 15
D) 23x - 22y - z = 11
E) -23x + 22y - 11z = 10

18. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones. Diga cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:
I. Si para algún $k \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=1}^{k} |a_i b_i| = 0$, entonces $a_i = 0\ \forall\, i \in \{1, ..., k\}$ o $b_i = 0, \forall\, i \in \{1, ..., k\}$
II. Si para algún $k \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| = 0$, entonces $\sum_{i=1}^{k} |a_i b_i| = 0$
III. Si $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \leq M$ y $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i| \leq M$ entonces $\sum_{i=1}^{k} |a_i b_i| \leq M^2, \forall\, k \in \mathbb{N}$
A) Sólo II B) Sólo III C) I y II
D) II y III E) I, II y III

19. Sea $S_n(x) = x + x^2 + ... + x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
Determine el valor de $S_n\left(\frac{3}{2}\right) - S_n\left(\frac{1}{2}\right)$
A) $3\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$
B) $3\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$
C) $3\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$
D) $3\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$
E) $3\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n + 4$

20. Sean f, g y h funciones reales de variable real.
Dadas las siguientes proposiciones:
I. h o (f+g) = h o f + h o g
II. Si Dom(f) = Dom(g) = $\mathbb{R}$, entonces Dom(f o g) = $\mathbb{R}$
III. (f o g) o h = f o (g o h)
Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).
A) VVV B) VFV C) FVV
D) FVF E) FFF

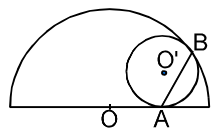
MATEMÁTICA PARTE 2

21. Tres de las diagonales de un polígono regular forman un triángulo equilátero. Determine la suma de los ángulos internos si se sabe que la medida de su ángulo interno es mayor que 140° pero menor que 156°.
A) 1 440° B) 1 620° C) 1 800°
D) 1 980° E) 2 160°

22. $\mathcal{C}$ es una circunferencia con diámetro $\overline{AB}$ y P es un punto exterior a $\mathcal{C}$. Se trazan los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ tal que la prolongación de $\overline{PB}$ corta a la circunferencia en C. Si el ángulo APC mide 25°, calcule la medida del ángulo CAP.
A) 53° B) 65° C) 45°
D) 37° E) 55°

23. En la figura mostrada, O es el centro de la semicircunferencia de radio

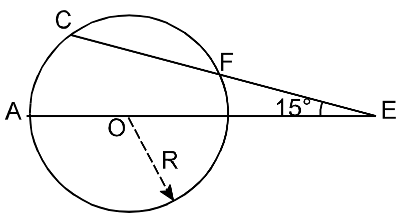
12 cm y O' es el centro de la circunferencia de radio 4 cm. Si la circunferencia es tangente en A y B a la semicircunferencia, calcule AB en cm.



A) $2\sqrt{6}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{2}$

24. En un cuadrilátero ABCD,
$m\sphericalangle BAC=3m\sphericalangle ACD$,
$m\sphericalangle ABC=m\sphericalangle ADC=90°$
Si $\overline{AC}\cap\overline{BD}=\{F\}$, FC=10 m, BD=9 m
calcule AF (en metros)
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

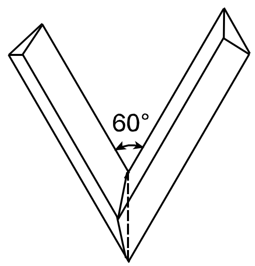
25. En la figura mostrada, O es centro de la circunferencia cuyo radio mide R unidades. Si AO=FE y $m\sphericalangle CEA=15°$, entonces el área del sector circular AOC es a la longitud de la circunferencia como:



A) $\frac{R}{12}$ B) $\frac{R}{14}$ C) $\frac{R}{15}$
D) $\frac{R}{16}$ E) $\frac{R}{18}$

26. Desde un punto exterior a un plano se trazan tres oblicuas congruentes de 14 m de longitud, de modo que sus pies son los vértices de un triángulo equilátero cuya área es $\frac{81}{4}\sqrt{3}$ m^2.
Calcule la distancia del punto al plano.
A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

27. Se quiere formar la letra "V" con dos troncos iguales de prisma oblicuo de base triangular, con un ángulo de abertura de 60°, tal como se muestra en la gráfica. El área de la base común es de 30 m^2 y la suma de las aristas laterales de uno de los troncos es 36 m. Calcule el volumen (en m^2) del material necesario para su construcción.



A) 60 B) 120 C) 360
D) $360\sqrt{3}$ E) 720

28. En un tetraedro regular, determine la

medida del ángulo entre las medianas de dos caras, si las medianas no se intersecan.

A) $\text{ArcCos}\left(\frac{1}{3}\right)$ B) $\text{ArcCos}\left(\frac{2}{3}\right)$
C) $\text{ArcCos}\left(\frac{1}{6}\right)$ D) $\text{ArcCos}\left(\frac{1}{7}\right)$
E) $\text{ArcCos}\left(-\frac{1}{3}\right)$

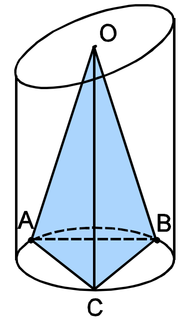
29. Se tiene un cono circular recto de volumen V y longitud de la altura H. La superficie lateral de este cono se interseca por dos planos paralelos a la base que trisecan a la altura H, obteniéndose conos parciales de volumen V_1 y V_2, respectivamente ($V_2 > V_1$)
Si $V = aV_1 + bV_2$, calcule el cociente $\frac{a}{b}$, sabiendo que: a - 2b = 12

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

30. En un tetraedro regular de arista "a", la distancia desde el centro de una de sus caras a cada una de las caras restantes es:

A) $\frac{\sqrt{2}}{3}a$ B) $\frac{a}{\sqrt{3}}$ C) $\sqrt{\frac{2}{3}}a$
D) $\frac{a}{\sqrt{6}}$ E) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}a$

31. En la figura, O - ABC es una pirámide regular. Calcule la relación que existe entre el volumen de la pirámide regular y el volumen del tronco de cilindro (O es centro).



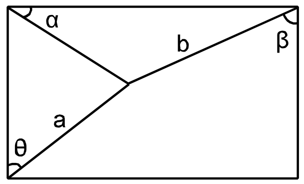
A) $\frac{\sqrt{3}}{3\pi}$
B) $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$
C) $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$
D) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
E) $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$

32. Un stand de una feria de libros tiene un piso rectangular de 2 880 m^2 y el techo tiene una forma semicilíndrica. ¿Cuántos m^2 de lona se necesitarían para el techo, si el largo del stand es el quíntuple del ancho?
A) 1 240π B) 1 340π C) 1 440π
D) 1 540π E) 1 640π

33. En la figura mostrada, el valor de:

$$E = \frac{a.Tg\alpha.Sen\theta}{b.Cos\beta},$$

es:



A) -2 B) -1 C) 1
D) 2 E) 3

34. Determine la distancia del punto $\left(\frac{1}{4}; 4\right)$ a la recta $\mathscr{L}$ de ecuación:

$y + 1 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)$

A) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ B) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ C) $\frac{4}{\sqrt{5}}$
D) $\frac{5}{\sqrt{5}}$ E) $\frac{6}{\sqrt{5}}$

35. Para $\alpha \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$, calcular la variación de $M = Cos^2\alpha - Cos\alpha + 2$

A) $\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right]$ B) $\left[\frac{7}{4}, 3\right]$ C) $\left[\frac{7}{4}, 4\right]$
D) $\left[\frac{9}{4}, 4\right]$ E) $\left[\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right]$

36. Si Secx = Csc2θ - Ctg2θ, determine:

$$E = \frac{Sec^2\theta - Tg^2x}{2 - Ctg\theta + Cosx}$$

A) -1 B) 0 C) $\frac{1}{2}$
D) 1 E) $\frac{2}{3}$

37. Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F):

I. Si ArcSen(-x) = $-\frac{\pi}{2}$, entonces x = 1
II. Si ArcCos(-x) = 1, entonces x = -π
III. Si x ∈ [-1, 1], entonces:
ArcSen(-x) + ArcCos(-x) = $\frac{\pi}{2}$

A) FFV B) VVV C) VVF
D) VFF E) VFV

38. Para 1 < x < 3 resolver la siguiente inecuación:

Sen(πx) - Cos(πx) < 0

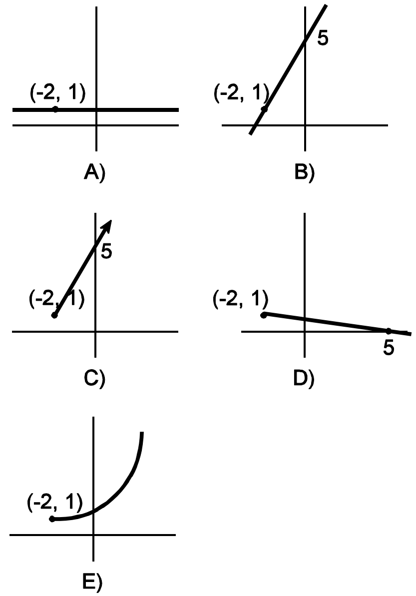
A) $\left\langle 1, \frac{5}{4}\right\rangle$
B) $\left\langle \frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right\rangle$
C) $\left\langle \frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right\rangle$
D) $\left\langle \frac{9}{4}, \frac{5}{2}\right\rangle$
E) $\left\langle \frac{9}{4}, 3\right\rangle$

39. Los vértices de un triángulo son:
A = (-1, -1); B = (1, 2); C = (5. 1)

entonces el coseno del ángulo $B\hat{A}C$ vale:

A) 0,789 B) 0,798 C) 0,879
D) 0,897 E) 0,987

40. Sea:
A = {(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$ / x=-2 + t^2, y = 1 + 2t^2; t ∈ $\mathbb{R}$}
entonces la gráfica que representa a A es:



RESOLUCIÓN

01. Convertimos $\overline{49d}$ a base 7:

$\overline{49d} = 490 + d = 1300_7 + d$

Nos piden la máxima suma de cifras:

Si d = 9: $499 = 1300_7 + 12_7 = 1312_7 \to$ suma: 7

Si d = 8: $498 = 1300_7 + 11_7 = 1311_7 \to$ suma: 6

Si d = 7: $497 = 1300_7 + 10_7 = 1310_7 \to$ suma: 5

Si d = 6: $496 = 1300_7 + 6 = 1306_7 \to$ suma: 10

De aquí en adelante cuando d sea 5; 4, 3, ..., 0, el valor de la suma será 9, 8, 7, ..., 4

Por lo tanto la máxima suma de cifras es 10.

Rpta. A

02. Por dato:

$n + m = K^2$

$n - m = Q^2$

Como: $n = 2m + 1 \to 3m + 1 = K^2$

$m + 1 = Q^2$

Como K^2 y Q^2 son mínimos y diferentes

$m = 8 \to K^2 = 25 \wedge Q^2 = 9$

$n = 17$

$\therefore 3m - n = 7$

Rpta. E

03. Sean:

x bicicletas

y colchonetas

z máquinas de remo

Entonces:

$150x + 80y + 300z = 5000$ .... (α)

También:

$x + y + z = 40$......................... (β)

Hacemos:

$\frac{(\alpha)}{10}-(\beta)\times 8$: $7x + 22z = 180$ ... (δ)

Todo a $\overset{o}{7}$: $\overset{o}{7}+(\overset{o}{7}+1)z = \overset{o}{7}+5 \to z = \overset{o}{7}+5$

De donde:

z : 5; 12; 19; .....

(I) Si z = 5

en (δ): x = 10; en (β): y = 25

(II) Si z=12, en (δ): x = -12 (no cumple)

Entre bicicletas y máquinas de remo:

$x + z = 15$

Rpta. A

04. **I. Verdadero**

De la definición del máximo común divisor (MCD)

si MCD(a; b) = d

entonces existen enteros m y n, tal que:

ma+nb = d .... (combinación lineal)

Como a y b son PESI, entonces:

MCD(a; b) = 1

$\therefore$ ma + nb = 1

II. Verdadero

Sea: MCD(a; ab + 1) = d

entonces:

• $a = \overset{o}{d}$

• $\underbrace{ab}_{\overset{o}{d}} + 1 = \overset{o}{d} \to 1 = \overset{o}{d}$, solo d = 1

$\therefore$ a y (ab + 1) son PESI

III. Verdadero

Sea: MCD(ab; $a^n + b^m$) = d

entonces:

• $ab = \overset{o}{d}$

• $a^n + b^m = \overset{o}{d}$ .... (α)

Sea “p” un factor primo de “d”

Si $a = \overset{o}{p}$, en (α):

$\overset{o}{p} + b^m = \overset{o}{p}$

$b^m = \overset{o}{p} \to b = \overset{o}{p}$

Como a y b son PESI $\to$ p = 1 (contradicción)

Se observa que “d” no tiene factores primos

$\to$ d = 1

$\therefore$ ab y (a^n+b^m) son PESI

Rpta. E

05. Se tiene:

$n_1 = 1{,}3125$

$n_2 = \frac{21}{16} = 1{,}3125$

$n_3 = 1{,}\widehat{36} = \frac{136-1}{99} = \frac{15}{11}$

$n_4 = 1 + \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{5}{10^4} = 1{,}3125$

Luego:

$n_1 = n_2 = n_4 = \frac{21}{16} \wedge n = \frac{15}{11}$

Piden:

$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 3\left(\frac{21}{16}\right) + \frac{15}{11}$

$\therefore n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = \frac{933}{176}$

Rpta. D

06. Sea N = $\overline{abc}$ y M = $\overline{def}$

Por dato:

$N + \frac{2}{5}N = K^3 \to \frac{7}{5}N = K^3$

$M + \frac{1}{2}M = Q^2 \to \frac{3}{2}M = Q^3$

De donde :

$N = 5 \times 7^2 \times p^3 \to N = 245p^3$

$M = 2 \times 3 \times q^2 \to M = 6q^2$

Dato:

M + N < 500

$245p^3 + 6q^2 < 500$

Como $245p^3 < 500 \to p = 1$

Luego:

$6q^2 < 255 \rightarrow q < 6{,}5$

Para que M + N sea máximo: q = 6

Luego: M = 245 $\wedge$ N = 216

$\therefore$ M + N = 461

Rpta. D

07. Sea P el precio de venta en ambas tiendas:

a) En la tienda X el precio final es:

$$N \times \frac{85}{100} \times \frac{85}{100} \times \frac{80}{100} = 57{,}8\%N$$

b) En la tienda Y el precio final es:

$$N \times \frac{90}{100} \times \frac{60}{100} = 54\%N$$

Por condición:

$P_{final_X} = P_{final_Y}$, para lo cual P_{final_Y} será incrementado en su n%

Entonces: (100+n)%[54%N]=57,8%N

Resolviendo: n = $7{,}0\overset{\frown}{37}$

Aproximando a las centésimas:
n =7,04

Rpta. D

08. Los datos:

$$\underbrace{a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n}_{\text{n números}}$$

donde: $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

- La primera persona olvidó el dato a_i:

$$\frac{S - a_i}{n} = M_1 \rightarrow S - a_i = n \times M_1 \ \ldots\ldots (\alpha)$$

- La segunda persona olvidó el dato a_k:

$$\frac{S - a_k}{n} = M_2 \rightarrow S - a_k = n \times M_2 \ \ldots\ldots (\beta)$$

$$(\alpha) + (\beta) : 2S - \underbrace{(a_i + a_k)}_{N} = n(M_1 + M_2)$$

De donde:

$$S = \frac{n(M_1 + M_2) + N}{2}$$

$\therefore$ El verdadero promedio es:

$$\frac{S}{n} = \frac{n(M_1 + M_2) + N}{2n}$$

Rpta. E

09. $f(x) = a_0(x - x_0)^2 + x_0$;
V: vértice V = $(x_0; x_0)$
$a_0 = 1$ (dato)
$f(x) = (x - x_0)^2 + x_0$

$(0; 2) \in f \rightarrow 2 = (0 - x_0)^2 + x_0$

$$\rightarrow x_0^2 + x_0 - 2 = 0$$

$$\begin{array}{ll} x_0 & 2 \\ x_0 & -1 \end{array}$$

$$\rightarrow \cancel{x_0 = -2} \qquad x_0 = 1$$

$\therefore x_0 = 1$

Rpta. D

10. $$\frac{3x^4 + x^3 + x^2 + x - 2}{(x+1)\left(x - \frac{2}{3}\right)} = 3\left[\frac{3x^4 + x^3 + x^2 + x - 2}{3x^2 + x - 2}\right]$$

Por Horner:

3	3	1	1	1	-2
-1		-1	2		
		0	0	0	
2			3	-1	2
	1	0	1	0	0

$q'(x) = x^2 + 1$

$\therefore q(x) = 3(x^2 + 1)$

Rpta. D

11. **I. Verdadero**
Del enunciado:

$(p \rightarrow q) \rightarrow r \equiv V \ \ldots.. (\alpha)$
$(p \vee q) \rightarrow r \equiv V \ \ldots... (\beta)$
Si $r \equiv F$, reemplazando en (α):

$$\underbrace{(p \rightarrow q)}_{F} \rightarrow F \equiv V$$

Se observa que $p \equiv V \wedge q \equiv F$
Al reemplazar en (β):

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{p}_{V} \vee \underbrace{q}_{F})}_{V} \rightarrow \underbrace{r}_{F}}_{F} \equiv V \quad \textbf{(Contradicción)}$$

$\therefore r \equiv V$

II. Falso

$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ .... Condicional
$p \rightarrow q \equiv \sim(p \wedge \sim q)$ .. D' Morgan
$\therefore p \rightarrow q$ y $p \wedge \sim q$ no son proposiciones equivalentes

III. Falso

Del enunciado:
$\sim r \rightarrow q \equiv F$
Se observa que $r \equiv F \wedge q \equiv F$ también:

$$\underbrace{(p \rightarrow \underbrace{q}_{F})}_{V} \rightarrow \underbrace{r}_{F} \equiv F$$

$\therefore p \equiv F$

Rpta. C

12. Como:

$$\begin{vmatrix} a & m & b \\ a & m & x \\ x & m & b \end{vmatrix} = 0$$

simplificamos "m":

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{1} & \mathbf{b} \\ \mathbf{a} & \mathbf{1} & \mathbf{x} \\ \mathbf{x} & \mathbf{1} & \mathbf{b} \end{vmatrix}\begin{matrix} \mathbf{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{x} & \mathbf{1} \end{matrix} \mathbf{= 0}$$

$ab + x^2 + ab - (xb + xa + ab) = 0$

Efectuando:

$x^2 - (a+b)x + ab = 0$

$\therefore x_1 + x_2 = a + b$

Rpta. C

13. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & \bullet \\ \bullet & bc+d^2 \end{pmatrix}$

Por dato:

$ad-bc=\Delta \wedge a^2+2bc+d^2 = T \rightarrow a^2+d^2 = T-2bc$ .... (α)

Se pide:

$[Traz(A)]^2 = (a+d)^2 = \underbrace{a^2+d^2}_{\text{de } \alpha} + 2ad$

$[Traz(A)]^2 = T - 2bc + 2ad$

$[Traz(A)]^2 = T + 2\underbrace{(ad - bc)}_{\Delta}$

$\therefore [Traz(A)]^2 = T + 2\Delta$

Rpta. C

14. $|a-2|[f(x)]^2 - a^2f(x) \leq |f(x)|$

Si $f(x) > 0$: $|a-2|(f(x))^2 - a^2f(x) \leq f(x)$

$|a-2|(f(x))^2 - (a^2+1)f(x) \leq 0$

$f(x)\ (|a-2|\ f(x) - (a^2 + 1)) \leq 0$

$\rightarrow 0 < f(x) \leq \dfrac{a^2+1}{|a-2|};\ a \neq 2$

Si $f(x)<0$: $|a-2|(f(x))^2 - a^2f(x) \leq -f(x)$

$|a-2|(f(x))^2 + (1-a^2)f(x) \leq 0$

$f(x)(|a-2|f(x) + 1-a^2) \leq 0$

$\rightarrow 0 < f(x) \leq \dfrac{a^2-1}{|a-2|};\ a \neq 2$

$\therefore a \in \mathbb{R} - \{2\}$

Rpta. C

15. Como: $0 < b < 1 \wedge a < c$

I. Verdadero

$b^a > b^c \Rightarrow a < c$

II. Falso

Como $a > b^c$

$Log_b a < Log_b b^c$

$\Rightarrow Log_b a < c$

III. Falso

Como no sabemos cómo es "a", positivo o negativo

Rpta. C

16. De las rectas de crecimiento de la función objetivo, su vector dirección es (-1; -2), entonces el vector direccional de la función objetivo es (2, -1), entonces la función objetivo es de la forma $F(x, y) \equiv K(2x - y)$.
Los vértices de la región poligonal son (0; 3), (3; 4), (14/3; 6/3), (2; 0)
Al reemplazar se obtiene el máximo con $\left(\frac{14}{3}; \frac{6}{3}\right)$ el cual es: $\frac{20}{3}$

Rpta. C

17. De la ecuación del plano:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}$$

La ecuación vectorial de la recta es:
$(x, y, z) = (4, 2, 3)t + (2, 3, 1)$
Sea:
$t = 0 \rightarrow (x, y, z) = (2, 3, 1)$
$t = -1 \rightarrow (x, y, z) = (-2, 1, -2)$
Además $(x, y, z) = (3, -2, 5)$ dato
Estos puntos satisfacen: $ax+by+cz=15$
Reemplazando:
$3a - 2b + 5c = 15$
$2a + 3b + c = 15$
$-2a + b - 2c = 15$
Resolviendo: $a = -23$, $b = 13 \wedge c = 22$
$\Rightarrow$ La ecuación es:
$-23x + 13y + 22z = 15$

Rpta. C

18. I. La proposición es falsa
Sea:

$\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} \{(-1)^k+1\} = 0+2+0+2+.....$

$\sum_{i=1}^{k} b_i = \sum_{i=1}^{k} \{(-1)^{k+1}+1\} = 2+0+2+0+....$

Observamos que: $\sum_{i=1}^{k} \{a_ib_i\}=0$ pero ninguno de los dos es cero

II. La proposición es verdadera.

Si $\sum_{i=1}^{k} |a_i| = |a_1|+|a_2|+....+|a_k| = 0$

$\rightarrow |a_i| = 0$

pero: $\sum_{i=1}^{k} |a_i||b_i| = \sum_{i=1}^{k} |0||b_i| = 0$

III. La proposición es verdadera
Por inducción
$k=1$ $|a_1| \leq M \wedge |b_1| \leq M \rightarrow |a_1b_1| \leq M^2$
$k=2$ $|a_1|+|a_2| \leq M \wedge |b_1|+|b_2| \leq M$
Multiplicando:
$|a_1||b_1|+|a_1||b_2|+|a_2||b_1|+|a_2||b_2| \leq M^2$
Pero:

$|a_1b_1|+|a_2b_2| \leq |a_1b_1|+|a_2b_2|+|a_1b_2|+|a_2b_1| \leq M^2$

Por transitividad:
$|a_1b_1|+|a_2b_2| \leq M^2$

así sucesivamente, en general:

$\sum_{i=1}^{k} |a_ib_i| \leq M^2$

Rpta. D

19. Como:

$S_n(x) = x+x^2+x^3+....+x^n$

$S_n(x) = x\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)$

Ahora calculamos:

$$S_n\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n-1}{\frac{3}{2}-1}\right) = 3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right)$$

$$S_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}\right) = -\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right)$$

Luego:

$$S_n\left(\frac{3}{2}\right) - S_n\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$$

Rpta. B

20. f, g, h son funciones de variable real, por teoría:

I. Falso
h o (f+g) = h o f + h o g

II. Verdadero
Dom(f) = $\mathbb{R}$ $\wedge$ Dom(g) = $\mathbb{R}$
→ Dom (f o g) = $\mathbb{R}$

III. Verdadero
(f o g) o h = f o (g o h)

Rpta.C

21. Sea "n" el número de lados del polígono regular.

Donde:

i < 156 → e > 24 → n < 15
i > 140 → e < 40 → n > 9

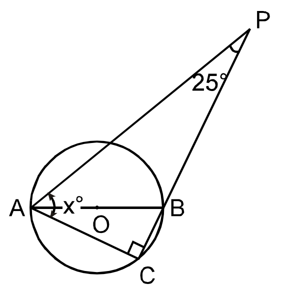
Luego, como tres diagonales determinan un triángulo equilátero, los posibles valores de "n" son:

{6; 9; 12; 15; ....}

Pero: 9 < n < 15 → n = 12
Sabemos : $S_i = 180(n-2)$
$\therefore S_i = 1\,800$

Rpta. C

22.

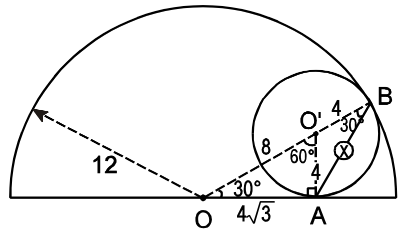


Dato: m∢P
Piden: m∢PAC
Si $\overline{AB}$ es diámetro → m∢C = 90
En ◺ACP: x = 65°

Rpta. B

ACADEMIA PITÁGORAS EXAMEN DE ADMISIÓN 2013-I
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

23.

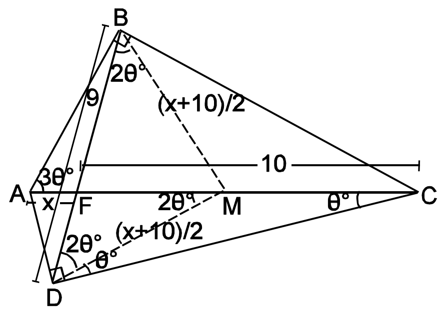


✳ La línea que une los centros O y O' contienen al punto de tangencia "B".

✳ ΔOAB es isósceles.
ΔAO'B es isósceles
→ OA = AB → x = $4\sqrt{3}$

Rpta. D

24.



En el ◺ ABC y en el ◺ ADC se trazan las medianas $\overline{BM}$ y $\overline{DM}$, luego:

AM=MC=BM=DM= $\frac{x+10}{2}$

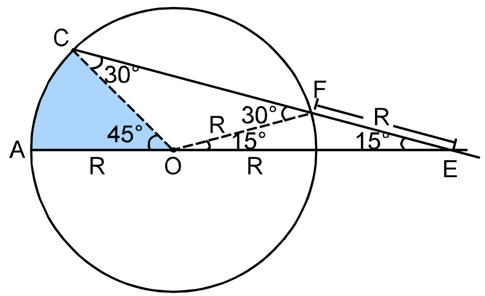
DF=FM=(10-x)/2

En el ΔBDM: Por $\Delta_s \sim_s$:

$$\left(\frac{x+10}{2}\right)^2 = (9)\left(\frac{10-x}{2}\right) \rightarrow x = 2$$

Rpta. B

25.



Nos dan:

m∢E = 15
FE = R

Nos piden:

$$\frac{S_{\triangle AOC}}{\mathcal{L}_{\odot}} = x$$

Entonces:

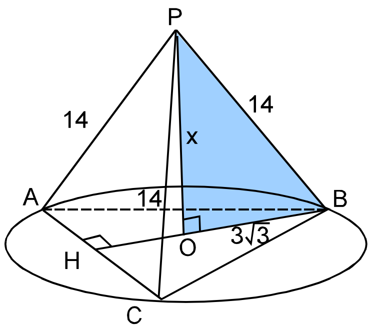
- ΔOFE: isósceles
- ΔCOF: isósceles
  m∢AOC = 45
  $S_{\triangle AOC} = \frac{\pi R^2}{8}$

$\mathcal{L}_{\odot} = 2\pi R$

$\therefore x = \dfrac{R}{16}$

Rpta. D

26.



$S_{ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{81\sqrt{3}}{4} \rightarrow AB = 9$

Siendo O el baricentro:

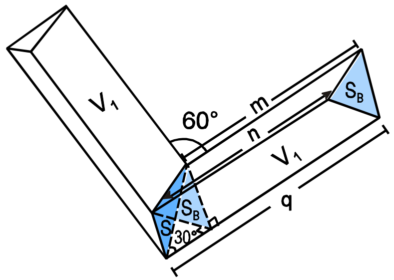
$OH = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$; $OB = 3\sqrt{3}$

◣POB: $x^2 = (14)^2 - (3\sqrt{3})^2$

$\therefore x = 13$

Rpta. E

27.



Datos: S= 30 , m+n+q=36

Del gráfico:

$V_1 = \underbrace{[S\cos 60°]}_{S_B}\left(\dfrac{36}{3}\right) = (30)\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{36}{3}\right)$

$V_1 = 180$

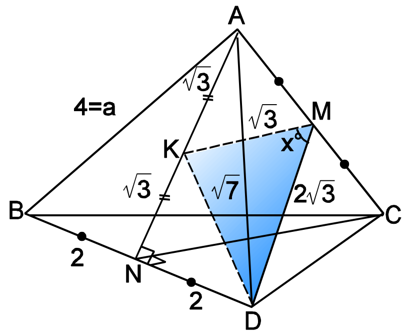
$V_x = 2V_1 = 2\,(180)$

$\therefore V_x = 360$

Rpta. C

28. **Primera Solución**

Considerando a=4, tenemos la primera solución



Sean las medianas que se cruzan $\overline{CN}$ y $\overline{DM}$ que miden $2\sqrt{3}$

ΔANC: $\overline{KM}//\overline{CN} \rightarrow$ x es la medida del ángulo con el que se cruzan $\overline{CN}$ y $\overline{DM}$

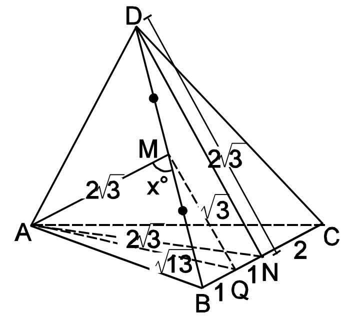
$KM=\dfrac{CN}{2}=\sqrt{3}$, ΔKND: por Pitágoras $KD=\sqrt{7}$. Finalmente en el ΔKMD teorema del coseno:

$$\text{Cosx}=\frac{(2\sqrt{3})^2+\sqrt{3}^2-\sqrt{7}^2}{2.\sqrt{3}.2\sqrt{3}}=\frac{2}{3}$$

Luego: $x = \text{ArcCos}\left(\dfrac{2}{3}\right)$

Rpta. B

Segunda Solución



Sea: AB = 4

M y N son puntos medios

Sean las medianas $\overline{AM}$ y $\overline{DN}$ que se cruzan

ΔBDN: $\overline{MQ}//\overline{DN}$, entonces x es la medida del ángulo con el que se cruzan $\overline{AM}$ y $\overline{DN}$.

◣ANQ: por Pitágoras $AQ=\sqrt{13}$

En el ΔAMQ por el teorema del coseno:

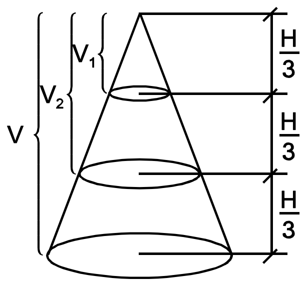
$$\text{Cosx} = \frac{(2\sqrt{3})^2+\sqrt{3}^2-\sqrt{13}^2}{2.2\sqrt{3}.\sqrt{3}} \rightarrow \text{Cosx} = \frac{1}{6}$$

$\therefore x = \text{ArcCos}\left(\dfrac{1}{6}\right)$

Rpta. C

Nota: En este problema hay dos casos los cuales muestran las soluciones

29.



- Por semejanza de conos:

$$V_1 = \frac{V}{27};\quad V_2 = \frac{8V}{27}$$

- Dato: $V = aV_1 + bV_2$

$$V = a.\frac{V}{27} + b.\frac{8V}{27}$$

$$a + 8b = 27$$

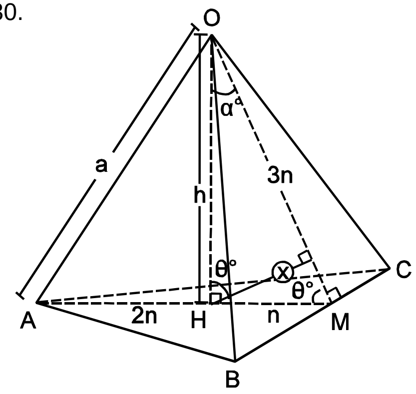
Dato: $a - 2b = 12$

Resulta: $a = 15;\ b = \dfrac{3}{2}$

$$\therefore\ \frac{a}{b} = 10$$

Rpta. C

30.



✳ En el tetraedro regular O - ABC:

$$OH = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ \text{............ (I)}$$

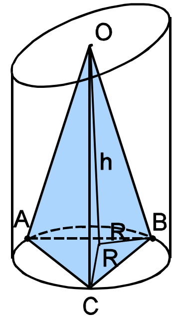
Por $\triangle$s ~s:

$$\frac{x}{n} = \frac{h}{3n} \rightarrow x = \frac{h}{3}$$

$$x = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \rightarrow x = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\,a$$

Rpta. E

31.



Nos piden:

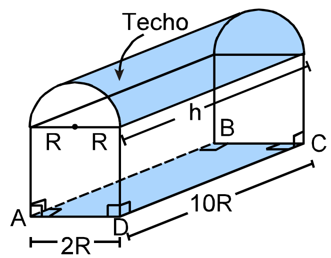
$$x = \frac{V_{PIRÁMIDE}}{V_{TRONCO}}$$

$$x = \frac{S_{\Delta ABC}\cdot\frac{\cancel{h}}{3}}{S_{\bullet}\cdot\cancel{h}}$$

$$x = \frac{\frac{\cancel{3}}{4}\cancel{R^2}\sqrt{3}/\cancel{3}}{\pi\cancel{R^2}} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$$

Rpta. C

32.



Dato:

$DC = 5.\ AD$

$$S_{ABCD} = 2\ 880$$

Entonces:

$$S_{ABCD} = 2R.10R = 2\ 880$$

$$R = 12 \text{ y } h = 10R$$

$$\rightarrow h = 120$$

Nos piden:

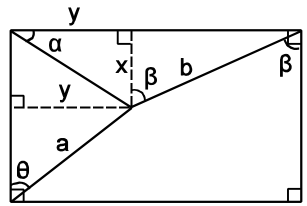
$$S_{lona} = \pi R.h$$

$$S_{lona} = \pi.12.120$$

$$\therefore\ S_{lona} = 1\ 440\pi$$

Rpta. C

33.



Lo pedido:

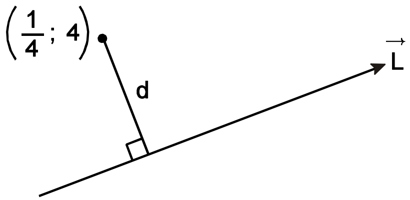
$$E = \frac{aTg\alpha.Sen\theta}{b.Cos\beta}$$

De la figura reemplazamos:

$$E = \frac{a.\frac{x}{y}.\frac{y}{a}}{b.\frac{x}{b}} = \frac{x}{x} = 1$$

Rpta. C

34. Sea la recta $\vec{L}$: $4x - 2y + 1 = 0$



$$d = \frac{|4x - 2y + 1|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}}$$

$$d = \frac{\left|4\left(\frac{1}{4}\right) - 2(4) + 1\right|}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

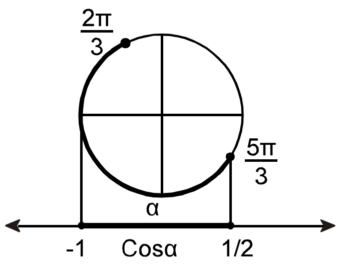
Rpta. B

35. $\frac{2\pi}{3} \le \alpha \le \frac{5\pi}{3}$

$M = Cos^2\alpha - Cos\alpha + 2$

$$M = \left(Cos\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

En la C.T:



$$-1 \le Cos\alpha \le \frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{2} \le \left(Cos\alpha - \frac{1}{2}\right) \le 0$$

$$0 \le \left(Cos\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{9}{4}$$

$$\frac{7}{4} \le \left(Cos\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \le 4$$

$$\frac{7}{4} \le M \le 4$$

Rpta. C

36. Condición:

$$\begin{cases} Secx = Csc2\theta - Ctg2\theta \\ Secx = Tg\theta \\ Cosx = Ctg\theta \end{cases}$$

Lo pedido:

$$E = \frac{Sec^2\theta - Tg^2x}{2 - Ctg\theta + Cosx}$$

$$E = \frac{1 + Tg^2\theta - (Sec^2x - 1)}{2 - Ctg\theta + Cosx}$$

$$E = \frac{2 + \cancel{Tg^2\theta} - \cancel{Tg^2\theta}}{2 - \cancel{Cosx} + \cancel{Cosx}}$$

$$\therefore E = 1$$

Rpta. D

37. **I. Verdadero**

$ArcSen(-x) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 1$

II. Falso

$ArcCos(-x) = 1 \Rightarrow x = -\pi$

III. Verdadero

$x \in [-1; 1] \rightarrow$

$ArcSen(-x) + ArcCos(-x) = \frac{\pi}{2}$

Rpta. E

38. $1 < x < 3$

$Sen(\pi x) - Cos(\pi x) < 0$

$$Sen(\pi x)\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}Cos(\pi x) < 0.\ \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Sen\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$$

El intervalo donde el seno es negativo:

$$\pi < \pi x - \frac{\pi}{4} < 2\pi$$

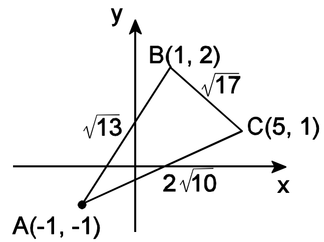
$$\frac{5\pi}{4} < \pi x < \frac{9\pi}{4}$$

$$\frac{5}{4} < x < \frac{9}{4}$$

$$\therefore x \in \left\langle \frac{5}{4}, \frac{9}{4} \right\rangle$$

Rpta. B

39.



Por el teorema de cosenos:

$$(\sqrt{17})^2 = (\sqrt{13})^2 + (2\sqrt{10})^2 - 2(\sqrt{13})(2\sqrt{10})CosA$$

$\therefore$ CosA = 0,789

Rpta. A

40. $x=-2+t^2$, $y=1+2t^2$, $t \in \mathbb{R}$

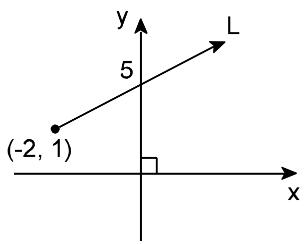
✷ $t^2 \geq 0$
$t^2 - 2 \geq -2$
$\Rightarrow$ $x \geq -2$

✷ $t^2 \geq 0$
$2t^2+1 \geq 1$
$\Rightarrow$ $y \geq 1$

Luego la ecuación cartesiana es:

$\vec{L}: y-2x=5$

Graficando:



Rpta. C

ACADEMIA PITÁGORAS EXAMEN DE ADMISIÓN **2013-I**
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA