Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $n=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+2\sqrt{3}$ este natural.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{6-x^2}=2^x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, suma cifrelor acestuia să fie egală cu 2.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$ și $B(3,1)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului AB.

5p **6.** Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $BC=8$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 1\\ 1 & -1 & 1\\ x & -1 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați $A(0)\cdot A(1)$.

5p **b)** Arătați că $\det\left(A(x)\right)=x^2-1$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele întregi x pentru care inversa matricei $A(x)$ are elementele numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de $x\circ y=\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2}$.

5p **a)** Calculați $2\circ 3$.

5p **b)** Arătați că $x\circ y=\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)-1}$, pentru orice x și y numere reale.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x\circ x=x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+2x+2$.

5p **a)** Calculați $g'(2)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)-g(x)}{2x^3}=\dfrac{1}{6}$.

5p **c)** Demonstrați că $2f(x)\geq g(x)$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2+\dfrac{1}{x+2}$ și $F:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+2x+\ln(x+2)$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 (x+2)\,f(x)\,dx$.

5p **b)** Verificați dacă funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Calculați $\int_{-1}^0 F(x)\,f(x)\,dx$.

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{3}-1\right)^2=4-2\sqrt{3}$	**3p**
	$n=4\in\mathbb{N}$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x+1=2x-1$	**2p**
	$x=2\Rightarrow y=3$	**3p**
3.	$6-x^2=x\Rightarrow x^2+x-6=0$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=2$	**2p**
4.	Numerele $\overline{abc}$ cu $a+b+c=2$ sunt $101, 110$ și $200\Rightarrow 3$ cazuri favorabile	**2p**
	Numărul numerelor de 3 cifre este $900\Rightarrow 900$ de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{1}{300}$	**2p**
5.	Mijlocul segmentului AB este punctul $M(2,2)$	**2p**
	$m_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=-1\Rightarrow$ panta mediatoarei segmentului AB este egală cu 1	**2p**
	Ecuația mediatoarei segmentului AB este $y=x$	**1p**
6.	ΔABC dreptunghic în $A\Rightarrow R=\dfrac{BC}{2}$	**3p**
	$R=4$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}2&0&2\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$	**3p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}1&x&1\\1&-1&1\\x&-1&1\end{vmatrix}=-1-1+x^2+x-x+1=$	**3p**
	$=x^2-1$	**2p**
c)	$\left(A(x)\right)^{-1}$ este inversa lui $A(x)\Rightarrow A(x)\cdot\left(A(x)\right)^{-1}=I_3\Rightarrow\det\left(A(x)\right)\cdot\det\left(\left(A(x)\right)^{-1}\right)=1$	**1p**
	$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow\det\left(A(x)\right)\in\mathbb{Z}$	**1p**
	$\left(A(x)\right)^{-1}$ are elementele numere întregi $\Rightarrow\det\left(\left(A(x)\right)^{-1}\right)\in\mathbb{Z}$	**1p**
	$\det\left(A(x)\right)=\pm1\Rightarrow x=0$ care verifică cerința	**2p**

2.a)	$2\circ 3=\sqrt{4\cdot 9+4+9}=$ $=7$	**3p** **2p**
b)	$x\circ y=\sqrt{x^2\left(y^2+1\right)+y^2}=\sqrt{x^2\left(y^2+1\right)+\left(y^2+1\right)-1}=$ $=\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)-1}$, pentru orice $x,\ y\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
c)	$x\circ x\circ x=\sqrt{\left(x^2+1\right)^3-1}$ $\sqrt{\left(x^2+1\right)^3-1}=x\Rightarrow x=0$, care verifică ecuația	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$g'(x)=2x+2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ $g'(2)=6$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-x^2-2x-2}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2x-2}{6x^2}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{6x}=\dfrac{1}{6}$	**2p** **3p**
c)	$h:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=2f(x)-g(x)\Rightarrow h'(x)=2e^x-2x-2$ și $h''(x)=2e^x-2\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$ h' crescătoare $\Rightarrow h'(x)\geq h'(0)=0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$ h crescătoare $\Rightarrow h(x)\geq h(0)=0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$	**2p** **1p** **2p**
2.a)	$(x+2)f(x)=x^2+4x+5$ $\int\limits_0^1\left(x^2+4x+5\right)dx=\left.\left(\dfrac{x^3}{3}+2x^2+5x\right)\right\|_0^1=$ $=\dfrac{22}{3}$	**1p** **2p** **2p**
b)	$F'(x)=\left(\dfrac{x^2}{2}+2x+\ln(x+2)\right)'=x+2+\dfrac{1}{x+2}$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$ $F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)\Rightarrow F$ este o primitivă a funcției f	**3p** **2p**
c)	$\int\limits_{-1}^0 F(x)\cdot f(x)dx=\int\limits_{-1}^0 F(x)\cdot F'(x)dx=$ $=\left.\dfrac{F^2(x)}{2}\right\|_{-1}^0=\dfrac{F^2(0)-F^2(-1)}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\ln^2 2-\dfrac{9}{4}\right)$	**2p** **3p**