Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $\sqrt{8}-2\left(\sqrt{2}-3\right)$ este natural.

5p **2.** Calculați $(f \circ f)(0)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2+1\right)=\log_2 5$.

5p **4.** După o ieftinire cu 20% prețul unui produs scade cu 200 de lei. Calculați prețul produsului după ieftinire.

5p **5.** Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}+4\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}-4\vec{j}$ sunt opuși.

5p **6.** Calculați lungimea medianei din A în triunghiul dreptunghic ABC cu ipotenuza $BC=10$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x-y+2z=a \\ 2x-y=0 \\ y-z=1 \end{cases}$, unde a este un număr real.

5p **a)** Determinați numărul real a știind că $(x,y,z)=(1,2,1)$ este soluție a sistemului.

5p **b)** Calculați determinantul matricei sistemului.

5p **c)** Rezolvați sistemul pentru $a=-2$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-X+a$, unde a este număr întreg.

5p **a)** Pentru $a=-2$, calculați $f(2)$.

5p **b)** Arătați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Arătați că, dacă polinomul f are o rădăcină întreagă, atunci a este multiplu de 6.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2}{x}+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x-2}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați punctele de extrem ale funcției f.

5p **c)** Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(0,4)$.

2. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_2^4 (x-1)f(x)\,dx=\ln\frac{5}{3}$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_2^3 \left(x^3-1\right)f(x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că aria suprafeței delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x=2$ și $x=3$, este egală cu $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+6=6\in\mathbb{N}$	**2p** **3p**
2.	$f(0)=1$ $(f\circ f)(0)=f(1)=4$	**2p** **3p**
3.	$x^2+1=5$ Rezultă $x=-2$ sau $x=2$, care verifică ecuaţia	**3p** **2p**
4.	Se notează cu x preţul iniţial $\Rightarrow 20\%\cdot x=200$ $x=1000$, deci preţul după ieftinire este 800 de lei	**2p** **3p**
5.	$\vec{u}=-\vec{v}\Rightarrow a-1=-2$ $a=-1$	**3p** **2p**
6.	M mijlocul lui $(BC)\Rightarrow AM=\dfrac{BC}{2}$ $AM=5$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$1-2+2\cdot1=a$, $2\cdot1-2=0$ și $2-1=1$ $a=1$	**3p** **2p**
b)	Determinantul sistemului este $\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=$ $=1+4+0-0-0-2=3$	**2p** **3p**
c)	$x=0$ $y=0$ $z=-1$	**2p** **2p** **1p**
2.a)	$f=X^3-X-2\Rightarrow f(2)=2^3-2-2=$ $=4$	**3p** **2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-1$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=2$	**2p** **3p**
c)	$k\in\mathbb{Z}$ este rădăcină a lui $f\Rightarrow k^3-k+a=0$ $a=-(k-1)\cdot k\cdot(k+1)\Rightarrow a$ este număr întreg multiplu de 6, deoarece este divizibil cu trei numere întregi consecutive	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\dfrac{2}{x}+\ln x\right)'=2\left(\dfrac{1}{x}\right)'+\dfrac{1}{x}=$ $=-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-2}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p** **3p**

b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ $f'(x)<0$, pentru $x\in(0,2)$ şi $f'(x)>0$, pentru $x\in(2,+\infty)$ Punctul de extrem este $x=2$	**2p** **2p** **1p**
c)	$f''(x)=\left(\frac{x-2}{x^2}\right)'=\frac{1\cdot x^2-(x-2)\cdot 2x}{x^4}=\frac{4-x}{x^3}$ $x\in(0,4)\Rightarrow 4-x>0\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow f$ este convexă pe intervalul $(0,4)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_2^4 (x-1)f(x)dx=\int_2^4 \frac{1}{x+1}dx=$ $=\ln(x+1)\Big\|_2^4=\ln\frac{5}{3}$	**2p** **3p**
b)	$\int_2^3 \left(x^3-1\right)\frac{1}{x^2-1}dx=\int_2^3 \frac{x^2+x+1}{x+1}dx=$ $=\int_2^3\left(x+\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\ln(x+1)\right)\Big\|_2^3=\frac{5}{2}+\ln\frac{4}{3}$	**2p** **3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_2^3 \|f(x)\|dx=\int_2^3\frac{1}{x^2-1}dx=$ $=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\Big\|_2^3=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$	**2p** **3p**