TEST 20 PROBLEME DE MATEMATICĂ(NR.20) (PROBLEME POSIBILE! ...admitere 2013)

PROBLEMA NR.1 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $x^4 + 3x^3 + mx^2 + nx - 10 = 0$ să admită soluţia $x_1 = \mathrm{i}$. **(4 pct.)**

a) $m = -10,\ n = 3$; b) $m = 1,\ n = -1$; c) $m = -9,\ n = 3$;
d) $m = 0,\ n = 0$; e) $m = -3,\ n = 10$; f) $m = 3,\ n = -10$.

PROBLEMA NR.2 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Expresia $E = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, are valoarea **(4 pct.)**

a) $3\sqrt{2}$; b) $3\sqrt{3}$; c) 2; d) $2\sqrt{2}$; e) $2\sqrt{3}$; f) 3.

PROBLEMA NR.3 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Fie ecuaţia $x^2 - ax + 4 = 0$, unde $a \in \mathbb{R}$ este un parametru. Dacă soluţiile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei verifică egalitatea $x_1 + x_2 = 5$, atunci **(4 pct.)**

a) $x_1 = x_2$; b) $a < 0$; c) $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$; d) $a = 0$; e) $a = 5$; f) $a = 4$.

PROBLEMA NR.4 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right)$. **(4 pct.)**

a) $-\dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{1}{2}$; c) ∞; d) nu există; e) 1; f) -1.

PROBLEMA NR.5 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Pe $\mathbf{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x \star y = xy + 2ax + by$. Să se determine relaţia dintre a şi b astfel încât legea de compoziţie să fie comutativă. **(4 pct.)**

a) $a - b = 2$; b) $a = 2b$; c) nu există; d) $a = b$; e) $a = \dfrac{b}{2}$; f) $a + b = 1$.

PROBLEMA NR.6 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{t^2}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\, dt$. Decideţi: **(6 pct.)**

a) f este impară; b) f are două puncte de extrem; c) graficul lui f admite o asimptotă oblică; d) graficul lui f admite o asimptotă orizontală; e) $f(0) = 0$; f) f este convexă.

PROBLEMA NR.7 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Să se calculeze limita şirului $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2x^{k-1}}$, unde $|x| > 1$. **(6 pct.)**

a) $\dfrac{x^3}{(x-1)^3}$; b) $\dfrac{x}{x-1}$; c) $\dfrac{1}{x}$; d) $\dfrac{1}{x-1}$; e) $\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$; f) ∞.

PROBLEMA NR.8 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ x & -1 & x \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$. **(8 pct.)**

a) $x_1 = 0,\ x_2 = 3$; b) $x_1 = -5/2$; c) $x_1 = 3$; d) $x_1 = 0,\ x_2 = 4$; e) $x_1 = 0$; f) $x_1 = 1,\ x_2 = 4$.

PROBLEMA NR.9 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Să se determine suma S a coeficienţilor polinomului $f = (8X^3 - 7)^4$.

a) $S = 0$; b) $S = 3$; c) $S = 1$; d) $S = 2$; e) $S = 2^{10}$; f) $S = -2$.

PROBLEMA NR.10 MATEMATICĂ (algebră-analiză) (ATENȚIE ASTA VĂ PICĂ!!!)

Să se determine $m \in \mathbb{R}$ dacă ecuaţia $|\ln x| = mx$ are trei soluţii reale şi distincte.

a) $m \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$; b) $m > \frac{1}{e}$; c) $m = \frac{1}{e}$; d) $m < \frac{1}{e}$; e) $m = e$; f) $m > 0$.

PROBLEMA NR.11 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$. Atunci $f'(1)$ este

a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) -1; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$; f) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

PROBLEMA NR.12 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ să admită numai soluţia nulă (banală).

a) $m \neq -1$ şi $m \neq 2$; b) $m = 0$; c) $m = 2$; d) $m \in \mathbb{R}$; e) nu există; f) $m = -1$.

PROBLEMA NR.13 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Să se calculeze limita $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x}$.

a) $L = \frac{2}{3}$; b) $L = \frac{4}{9}$; c) $L = \infty$; d) nu există; e) $L = -1$; f) $L = 0$.

PROBLEMA NR.14 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sqrt[3]{x - 1} - x = -1$ este

a) $\{0\}$; b) $\{1, 2, 3\}$; c) $\varnothing$; d) $\{0, 1, 2\}$; e) P; f) $\{1\}$.

PROBLEMA NR.15 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f = 6X^4 - 7X^3 + aX^2 + 3X + 2$ să se dividă prin polinomul $g = X^2 - X - 1$.

a) $a = -2$; b) $a = 2$; c) $a = -1$; d) $a = -7$; e) $a = 0$; f) $a = 1$.

PROBLEMA NR.16 MATEMATICĂ (algebră-analiză) MARE ATENȚIE!!!

Funcţia $f : (0,\ 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 2x}$. Să se calculeze $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(f^{(k)}(1) - f^{(k+1)}(1)\right)$.

a) $S_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{3^{n+2}}\right)$; b) $S_n = -\frac{8}{9} + 2(-1)^n \left(1 - \frac{1}{3^{n+2}}\right)$; c) $S_n = 1 - \frac{1}{3^{n+2}}$; d) $S_n = -\frac{8}{9} + (-1)^n \left(1 - \frac{3}{3^{n+2}}\right)$; e) $S_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$;
f) $S_n = -\frac{8}{9} + (-1)^n (n+1)! \left(1 - \frac{1}{3^{n+2}}\right)$.

PROBLEMA NR.17 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Să se rezolve ecuaţia $\log_2 x + \log_2 2x = 3$.

a) $x = 0$; b) $x = -2$; c) nu are soluţii; d) $x = \pm 2$; e) $x = 1$; f) $x = 2$.

PROBLEMA NR.18 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Să se calculeze $I = \int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

a) $I = \mathrm{e}$; b) $I = -1$; c) $I = 1$; d) $I = 0$; e) $I = 2\mathrm{e}$; f) $I = -\mathrm{e}$.

PROBLEMA NR.19 MATEMATICĂ (algebră-analiză) (ASTA FACE DEPARTAJAREA!!!)

Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^4} \displaystyle\int_0^x t^2 \cdot \mathrm{e}^{-t^2} \cdot \sin t \, dt$. **(8 pct.)**

a) 0; b) ∞ ; c) $\dfrac{1}{4}$; d) 1; e) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$; f) $\dfrac{\sin 1}{\mathrm{e}}$.

PROBLEMA NR.20 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Se cer cea mai mică şi cea mai mare valoare pentru funcţia $f : [0,\ 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 5$. **(6 pct.)**

a) $-5, -2$; b) $-6, -2$; c) $1, 3$; d) $-6, 3$; e) $0, 3$; f) $-5, 3$.

RASPUNSURI LA GRILA CELOR 20 DE PROBLEME

1. C
2. E
3. E
4. B
5. E
6. D
7. A
8. F
9. C
10. A
11. F
12. A
13. B
14. D
15. D
16. F
17. F
18. C
19. C
20. B

REZOLVARI COMPLETE PENTRU ARGUMENTAREA GRILEI!

REZOLVARE PROBLEMA NR.1 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Soluţie. Înlocuind $x = i$ în ecuaţia $x^4 + 3x^3 + mx^2 + nx - 10 = 0$, obţinem $1 - 3i - m + ni - 10 = 0 \Leftrightarrow -(m+9) + i(n-3) = 0$, de unde prin identificare deducem $m + 9 = 0$ şi $n - 3 = 0$. Deci $m = -9$ şi $n = 3$.

REZOLVARE PROBLEMA NR.2 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Soluţie. Aducând la acelaşi numărător relaţia din enunţ obţinem: $E = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}$.

REZOLVARE PROBLEMA NR.3 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Soluţie. Din relaţiile lui Viete $x_1 + x_2 = a$ deducem $a = 5$.

REZOLVARE PROBLEMA NR.4 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Soluţie. Amplificând cu conjugata, obţinem:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{n})}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}.$$

REZOLVARE PROBLEMA NR.5 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Soluţie. Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem $x * y = y * x \Leftrightarrow xy + 2ax + by = yx + 2ay + bx \Leftrightarrow (2a - b)(x - y) = 0, \forall a, b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2a = b \Leftrightarrow a = b/2$.

REZOLVARE PROBLEMA NR.6 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Soluţie. Cum funcţia $g(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ este continuă, aplicăm teorema de medie pe intervalul $[x, x+1]$ şi avem $f(x) = (x+1-x)f'(\theta_x)$ unde $\theta_x \in (x, x+1)$ şi deci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{\theta_x\to\infty}\dfrac{\theta_x^2}{\sqrt{\theta_x^4+\theta_x^2+1}} = 1$. Deci graficul funcţiei f admite asimptota orizontală $y = 1$.

REZOLVARE PROBLEMA NR.7 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Soluţie. Pentru $x \neq 1$ avem $x + x^2 + \ldots + x^{n+1} = \frac{x^{n+2}-x}{x-1} = S(x)$ Derivând această relaţie de 2 ori, avem

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k = \frac{((n+2)x^{n+1}-1)(x-1)-x^{n+2}+x}{(x-1)^2} = \frac{(n+1)x^{n+2}-(n+2)x^{n+1}+1}{(x-1)^2}.$$

Derivând din nou în ambii membri, obţinem

$$S''(x) = \sum_{k=1}^{n}k(k+1)x^{k-1} = \frac{x^{n+2}(n+1)n-2(n+2)x^{n+1}+(n+2)(n+1)x^4-2}{(x-1)^3}.$$

Facând substituţia $x \to \frac{1}{x}$ şi ţinând seama că $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n^k}{x^n} = 0$, pentru $n \in \mathbb{N}$ şi $|x| > 1$, avem

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2x^{k-1}} = -\frac{2}{2(\frac{1}{x}-1)^3} = \frac{x^3}{(x-1)^3}.$$

REZOLVARE PROBLEMA NR.8 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Soluţie. Avem $\begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ x & -1 & x \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 4\}$.

REZOLVARE PROBLEMA NR.9 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Soluţie. Suma coeficienţilor polinomului $f = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ este $a_0 + \ldots + a_n = f(1)$. În cazul de faţă $f(1) = (8-7)^4 = 1$.

REZOLVARE PROBLEMA NR.10 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Soluţie. Existenta logaritmului cere condiţia $x \in (0, \infty)$. Ecuaţia se rescrie sub forma $\frac{|\ln x|}{x} = m$, şi are soluţii d.n.d. $m \in \operatorname{Im} g$, unde $g(x) = \frac{|\ln x|}{x}$, $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, deci

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{\ln x}{x}, & x \in (0, 1] \\ \frac{\ln x}{x}, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Funcţia g este compunere de funcţii continue, deci continuă. Aplicând regula lui l'Hospital obţinem

$$\lim_{x \searrow 0} g(x) = \infty, \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

si $g(1) = 0$. Avem $g'(x) = \frac{sign(\ln x)\cdot(1-\ln x)}{x^2}$, $x \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, iar $g'_s(1) = -1 \neq g'_d(1) = 1$. Se observă că $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$ iar $g(e) = \frac{1}{e}$. Avem deci tabelul de variaţie al funcţiei g.

x	0		1		e		∞
$g'(x)$	$-$	$-$	$-1\|1$	$+$	0	$-$	$-$
$g(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Deci ecuaţia are $g(x) = m$ are 3 rădăcini distincte d.n.d. $m \in (0, \frac{1}{e})$.

REZOLVARE PROBLEMA NR.11 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Soluţie. Avem $f'(x) = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$ şi deci

$$f'(1) = \frac{3}{3\sqrt[3]{3^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$$

REZOLVARE PROBLEMA NR.12 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Soluţie. Pentru ca sistemul să aibă soluţie unică, este necesar şi suficient ca

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Adunam prima coloana la coloana a doua si a treia, dezvoltăm D după linia a treia şi obţinem condiţia $(m+1)(3-m-1) \neq 0$, deci $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

REZOLVARE PROBLEMA NR.13 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Soluţie. Avem

$$L = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 \left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)^2 \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}.$$

REZOLVARE PROBLEMA NR.14 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Soluţie. Ecuaţia se scrie $\sqrt[3]{x-1} = x-1$. Ridicăm la cub. Avem $x-1 = (x-1)^3 \Leftrightarrow (x-1)[(x-1)^2-1] = 0 \Leftrightarrow x-1=0$ sau $x-1=\pm 1$, şi deci $x \in \{0,1,2\}$.

REZOLVARE PROBLEMA NR.15 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Soluţie. Facând împărtirea, se obtine câtul $6x^2-x+a+1$ şi restul $(a+7)(x+1)$. Condiţia de divizibilitate revine la anularea restului, deci rezultă $a=-7$.

REZOLVARE PROBLEMA NR.16 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Soluţie. Avem $f(x) = \frac{2}{x^2+2x} = \frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$. Dar $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}} \Rightarrow f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} - \frac{(-1)^k k!}{(x+2)^{k+1}}$, deci $f^{(k)}(1) = (-1)^k k\left(1-\frac{1}{3^{k+1}}\right)$. Dezvoltând suma şi reducând termenii egali, obţinem

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}(f^{(k)}(1) - f^{(k+1)}(1)) = f^{(1)}(1) - f^{(n+1)}(1) = \\ &= -\frac{8}{9} - (-1)^{n+1}(n+1)!\left(1-\frac{1}{3^{n+2}}\right) = -\frac{8}{9} + (-1)^n(n+1)!\left(1-\frac{1}{3^{(n+2)}}\right). \end{aligned}$$

REZOLVARE PROBLEMA NR.17 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Soluţie. Obţinem $\log_2 x + \log_2 2x = 3 \Leftrightarrow \log_2 x \cdot 2x = \log_2 2^3$ cu $x>0$ deci $2x^2 = 2^3$, de unde rezultă $x=2$.

REZOLVARE PROBLEMA NR.18 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Soluţie. Calculăm $I = \int_0^1 xe^x dx$. Integrând prin părţi $g'(x) = e^x, f(x) = x$, rezultă

$$I = e^x x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

REZOLVARE PROBLEMA NR.19 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Soluţie. Se cere să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^2 e^{-t^2}\sin dt$. Se observă că limita este de tipul $0/0$, deci aplicăm regula lui L'Hospital şi obţinem $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t^2 e^{-t^2}\sin t dt}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 e^{-x^2}\sin x}{4x^3} = \frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}e^{-x^2} = \frac{1}{4}\cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$.

REZOLVARE PROBLEMA NR.20 MATEMATICĂ (algebră-analiză)

Soluţie. Funcţia este polinomială de gradul doi, deci graficul acesteia este un arc de parabolă, care conţine vârful $(\frac{-b}{a}, \frac{-\Delta}{4a}) = (1,-6)$ şi care are drept capete punctele $(0, f(0)) = (0,-5)$ şi $(3, f(3)) = (3,-2)$. Deci cea mai mica valoare a functiei este -6, iar cea mai mare valoare este -2. *Altă soluţie.* Avem $f'(x) = 2x-2 = 2(x-1)$, iar tabelul de variaţie este

x	0		1		3
$f'(x)$	-2	$-$	0	$+$	4
$f(x)$	-5	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-2

deci cea mai mică valoare a funcţiei este -6 şi cea mai mare valoare este -2.