TEST MATEMATICĂ NR.18 (13 PROBLEME POSIBILE! ...PENTRU ... BAC... 2013)

PROBLEMA NR.1(SET COMPLET SUBIECTUL I –PROFIL MATE INFO-model simulare GALATI 2013)

(5 p) 1. Să se arate că $2\cdot\left(1+3+3^2+...+3^{2012}\right)<3^{2013}$.

(5 p) 2. Să se determine $a\in\mathbb{R}^*$ pentru care inecuaţia $ax^2+2(a+1)x+2a-1\geq 0$ nu are soluţii în mulţimea numerelor reale.

(5 p) 3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=\dfrac{11}{6}$.

(5 p) 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o cifră x, aceasta să verifice inegalitatea $(x+1)!-x!\leq 100$.

(5 p) 5. Să se determine ecuaţia înălţimii din A a triunghiului cu vârfurile $A(2,1), B(2,2), C(1,1)$.

(5 p) 6. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $AB=7\sqrt{2}$ şi $m\left(\hat{C}\right)=135°$.

PROBLEMA NR.2

Se consideră sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+13y-5z=0, \textit{unde } x,y,z\in\mathbb{R}. \\ x-11y+3z=0 \end{cases}$$

(5 p) a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A, A fiind matricea sistemului.

(5 p) b) Să se rezolve sistemul de ecuaţii.

(5 p) c) Să se găsească o soluţie (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care

$$(x_0+3)^2+(y_0+4)^2-(z_0+1)^2+y_0=x_0{}^2+y_0{}^2-z_0{}^2+39$$

PROBLEMA NR.3

Se consideră $a\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=3X^4-2X^3+X^2+aX-1\in\mathbb{R}[X]$.

(5 p) a) Să se calculeze $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}$, unde $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f.

(5 p) b) Să se determine restul împărţirii polinomului f la $(X-1)^2$.

(5 p) c) Să se demonstreze că f nu are toate rădăcinile reale.

PROBLEMA NR.4

<u>Subiectul III (30 puncte)</u>

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x\cdot\operatorname{arctg}x-\ln\left(1+x^2\right)$.

(5 p) a) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

(5 p) b) Să se arate că funcţia f' este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(5 p) c) Să se demonstreze că $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}_+^*$.

PROBLEMA NR.5 (eu zic ca aceasta problema va fi data anul acesta!!!)

Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(5 p) a) Să se calculeze I_2.

(5 p) b) Să se verifice că $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(5 p) c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} nI_n$.

PROBLEMA NR.6 (SAU ... ca aceasta problema va fi data anul acesta!!!)

Fie şirul $(I_n)_{n\in N}$ dat de $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+3x+2}dx$

5p a) Să se calculeze I_1.

5p b) Să se demonstreze că: $I_{n+2} + 3I_{n+1} + 2I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in N^*$

5p c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} nI_n$

PROBLEMA NR.7

Se considera multimea $Z[\sqrt{2}] = \{a+b\sqrt{2} | a,b \in Z\}$,functia f: $Z[\sqrt{2}] \to Z$, $f(a+b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$, $\forall$ a, b$\in$Z si multimea $A = \{x \in Z[\sqrt{2}] | f(x) = -1\}$.

a) Sa se verifice daca $7+5\sqrt{2} \in A$.

b) Sa se arate ca pentru orice x, y$\in$ $Z[\sqrt{2}]$, f(xy) = f(x)f(y).

c) Sa se arate ca multimea A este infinita.

PROBLEMA NR.8

Se considera functia f: R$\to$R, $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$

a) Sa se calculeze $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$

b) Sa se scrie ecuatia tangentei la graficul functiei in punctul de abscisa x = 0.

c) Sa se calculeze numarul punctelor de inflexiune ale functiei f.

PROBLEMA NR.9

Se considera functiile $f_n : R \to R$, $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$, $n \in N^*$.

a) Sa se calculeze aria suprafetei cuprinsa intre graficul functiei f_1, axele de coordonate si dreapta x = 1.

b) Sa se calculeze $\int_0^1 x(f_1(x))^2 dx$

c) Sa se arate ca $\lim_{n\to\infty} n(f_n(1) + f_n(2) + f_n(3) + ... + f_n(n)) = \frac{\pi}{4}$

PROBLEMA NR.10

Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to R$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

5p a)Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f

5p b)Să se determine punctele de extrem ale funcţiei f

5p c)Să se arate că $e^{\pi}>\pi^{e}$

PROBLEMA NR.11 (SET COMPLET SUBIECT I)

5p **1.**Să se arate că $\frac{1+3i}{1-3i}+\frac{1-3i}{1+3i}$ este număr real.

5p **2.**Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=2^{x-1}$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(2013)$

5p **3.**Câţi termeni iraţionali conţine dezvoltarea $\left(1+\sqrt{3}\right)^{8}$?

5p **4.**Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+1}=5-x$

5p **5.** Să se determine numerele reale a ştiind că lungimea segmentului determinat de punctele $A(-1,2)$ şi $B(4-a,4+a)$ este egală cu 5.

5p **6.** Ştiind că $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$, să se calculeze $\sin x$.

PROBLEMA NR.12

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

5p a)Să se calculeze $\det A$.

5p b)Să se verifice relaţia $A\left(A^2+6I_3\right)=O_3$.

5p c)Să se arate că $\det(I_3+xA^2)\geq 0,\ \forall x\in R$.

PROBLEMA NR.13

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy-3x-3y+12$.

5p a)Să se demonstreze că $x\circ y\in(3,+\infty)$ pentru $\forall x,y\in(3,+\infty)$

5p b)Să se determine $x\in R$ pentru care $x\circ x=x$

5p c)Să se arate că funcţia $f:R\to(3,+\infty)$, $f(x)=e^{x}+3$ este un izomorfism de la grupul $(R,+)$ la grupul $((3,+\infty),\circ)$.

REZOLVARI TEST NR. 18

REZOLVARE PROBLEMA NR.1

1. Determinarea sumei $1+3+3^2+...+3^{2012}=\frac{3^{2013}-1}{3-1}$ 3p

   Finalizare..........2p

2. Impunerea condiţiilor $\Delta<0,\ a<0$ 2p

   $\Delta=4\left(-a^2+3a+1\right)$ 1p

   Rezolvarea inecuaţiei $\Delta<0$ şi finalizarea $a\in\left(-\infty,\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)$ 2p

3. Impunerea condiţiei de existenţă $x>0$ 1p

   Obţinerea ecuaţiei $\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{3}\log_2 x=\frac{11}{6}$ 2p

   Finalizare $x=2$ 2p

4. $x!\cdot x\le 100$ 1p

   Inegalitatea este verificată pentru $x\in\{0,1,2,3,4\}$ 2p

   Finalizare: $P=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ 2p

5. Determinarea ecuaţiei dreptei BC : $y=x$ 2p

   Ecuaţia înălţimii din A a triunghiului ABC: $x+y-3=0$ 3p

6. $\frac{AB}{\sin C}=2R$ 2p

   Finalizare: $R=7$ 3p

REZOLVARE PROBLEMA NR.2

.a) $\det A=0\Rightarrow rangA<3$ 2p

Găsirea unui minor de ordin 2 nenul..........2p

Finalizare: rang A=2.......... ....1p

b) Alegem x, y necunoscute principale, iar $z=\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$ necunoscută secundară

$\begin{cases} x+y=\lambda \\ x+13y=5\lambda \end{cases}$ 3p

---

Finalizare: $S=\left\{\left(\frac{2\lambda}{3},\frac{\lambda}{3},\lambda\right),\lambda\in\mathbb{R}\right\}$ 2p

c) Obţinerea ecuaţiei $6x_0+9y_0-2z_0=15$ 1p

Înlocuim $x_0=\frac{2\lambda}{3}, y_0=\frac{\lambda}{3}, z_0=\lambda$ 2p

Finalizare: $\lambda=3$ şi soluţia cerută este $(2,1,3)$ 2p

---

REZOLVARE PROBLEMA NR.3

a) Scrierea relaţiilor lui Viete..2p

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{-\frac{a}{3}}{-\frac{1}{3}}=a$ 3p

b) Aplicarea teoremei împărţirii cu rest, obţinerea restului $r=mX+n,\ m,n\in\mathbb{R}$ şi

$f(x)=(x-1)^2 q(x)+mx+n,\ x\in\mathbb{R}$ 2p

Derivând avem $f'(x)=2(x-1)q(x)+(x-1)^2 q'(x)+m,\ x\in\mathbb{R}$ 1p

Pentru $x=1$ avem $m+n=1+a, m=8+a$ 1p

Finalizare: $r=(a+8)X-7$ 1p

c) Relaţiile lui Viete..2p

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+...+x_3x_4)=\frac{4}{9}-\frac{2}{3}<0$ 3p

---

REZOLVARE PROBLEMA NR.4

a) $f'(x)=arctgx+\frac{x}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}$ 3p

$f'(x)=arctgx-\frac{x}{1+x^2}, \forall x\in\mathbb{R}$ 2p

b) $f''(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ 3p

Finalizare 2p

c) f' strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ şi $f'(0)=0\Rightarrow f'(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}_+^*$ 2p

f strict crescătoare pe $\mathbb{R}_+^*$ 1p

$f(0)=0$ 1p

Finalizare 1p

REZOLVARE PROBLEMA NR.5

a) $I_2=\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$ 2p

$I_2=x\Big|_0^1-arctgx\Big|_0^1=1-\frac{\pi}{4}$ 3p

b) $I_{n+2}+I_n=\int_0^1 \frac{x^n(x^2+1)}{x^2+1}dx$ 2p

$$I_{n+2}+I_n=\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{1}{n+1} \text{ ....} 3\text{p}$$

c) Stabilirea monotoniei şirului $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 1p

Deducerea inegalităţii $\frac{1}{2(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{2(n-1)}, n\ge 2$ 2p

Finalizare: $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n=\frac{1}{2}$ 2p

---

REZOLVARE PROBLEMA NR.6

a) $I_1=\int_0^1\frac{x}{x^2+3x+2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x+3-3}{x^2+3x+2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx-\frac{3}{2}\int_0^1\frac{1}{(x+1)(x+2)}dx=$ **(2pct)**

$=\frac{1}{2}\ln(x^2+3x+2)\,|_0^1-\frac{3}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x}dx+\frac{3}{2}\int_0^1\frac{1}{2+x}dx$ **(2pct)**$=\ln\frac{9}{8}$ **(1pct).**

b) $I_{n+2}+3I_{n+1}+2I_n=\int_0^1\frac{x^{n+2}}{x^2+3x+2}dx+\int_0^1\frac{3x^{n+1}}{x^2+3x+2}dx+\int_0^1\frac{2x^n}{x^2+3x+2}dx$ **(1pct)**

$=\int_0^1\frac{x^{n+2}+3x^{n+1}+2x^n}{x^2+3x+2}dx$ **(2pct)** $=\int_0^1\frac{x^n(x^2+3x+2)}{x^2+3x+2}dx$ **(1pct)** $=\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$ **(1pct)**

c) $nI_n=\int_0^1\frac{nx^n}{x^2+3x+2}dx=\int_0^1 nx^n(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2})dx=\int_0^1(x^n)'x(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2})dx$ **(1pct)**

$=x^{n+1}(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2})\,|_0^1-\int_0^1 x^n[\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+2)^2}]dx$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\int_0^1[\frac{x^n}{(x+1)^2}-\frac{x^n}{(x+2)^2}]dx$ **(1,5pct)**

$0\le x^n\le 1\Rightarrow 0\le\frac{x^n}{(x+1)^2}\le x^n\Rightarrow 0\le\int_0^1\frac{x^n}{(x+1)^2}dx\le\frac{1}{n+1}$ **cu teorema "cleşte"**

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{(x+1)^2}dx=0$ **(2pct) Analog** $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{(x+2)^2}dx=0$ **deci** $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ **(0,5pct)**

ALTFEL

$x\in[0,1]\Rightarrow x^{n+1}\le x^{n}\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$ **(1pct)**

$\frac{1}{n+1}=I_{n+2}+3I_{n+1}+2I_n\le I_n+3I_n+2I_n=6I_n$ **deci** $\Rightarrow I_n\ge\frac{1}{6(n+1)}$ **(2pct)**

$\frac{1}{n-1}=I_n+3I_{n-1}+2I_{n-2}>I_n+3I_n+2I_n=6I_n$ **deci** $\Rightarrow I_n\le\frac{1}{6(n-1)}$ **(1pct)**

Cu teorema "cleste" rezulta cerinta (1pct).

REZOLVARE PROBLEMA NR.7

a) $7+5\sqrt{2}\in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si $f(7+5\sqrt{2})=49-2\cdot 25=-1\Rightarrow 7+5\sqrt{2}\in A$.

b) Fie $x, y\in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ oarecare, $x=a+b\sqrt{2}$, $y=c+d\sqrt{2}$.
$xy=(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=ac+(bc+ad)\sqrt{2}+2bd$
$f(xy)=f(ac+2bd+(bc+ad)\sqrt{2})=(ac+2bd)^2-2(bc+ad)^2=$
$=a^2c^2+4b^2d^2+4abcd-2b^2c^2-4abcd-2a^2d^2=a^2c^2+4b^2d^2-2b^2c^2-2a^2d^2$ (1)
$f(x)f(y)=f(a+b\sqrt{2})\cdot f(c+d\sqrt{2})=(a^2-2b^2)(c^2-2d^2)=a^2c^2-2b^2c^2-2a^2d^2+4b^2d^2$ (2)
Din (1) si (2) rezulta ca $f(xy)=f(x)f(y)$.
Deci pentru orice $x, y\in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $f(xy)=f(x)f(y)$.

c) Din a) $7+5\sqrt{2}\in A\Rightarrow f(7+5\sqrt{2})=-1$

Stim ca daca $x\in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ atunci $x^n\in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$.

Fie $x\in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Din b) $f(x^2)=(f(x))^2$

Presupunem ca $f(x^n)=(f(x))^n$ si aratam ca $f(x^{n+1})=(f(x))^{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$

$f(x^{n+1})=f(x^n\cdot x)=f(x^n)\cdot f(x)=(f(x))^n\cdot f(x)=(f(x))^{n+1}$

Deci $f(x^n)=(f(x))^n$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$.

Rezulta ca $f((7+5\sqrt{2})^{2n+1})=[f(7+5\sqrt{2})]^{2n+1}=(-1)^{2n+1}=-1\ \forall\ n\in\mathbb{N}$.

Deci $(7+5\sqrt{2})^{2n+1}\in A\ \forall\ n\in\mathbb{N}$. Deci multimea A are o infinitate de elemente.

REZOLVARE PROBLEMA NR.8

a) $f(0) = 4$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{(x^2-1)(x^2-4)-4}{x} = \frac{x^4-5x^2+4-4}{x} = x^3 - 5x^2 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(x^3-5x^2) = 0.$$

b) Ecuatia tangentei la graficul functiei in punctul de abscisa $x = 0$ este $y - f(0) = f'(0)(x-0)$
Functia f este derivabila pe R si din punctul a) rezulta $f'(0) = 0$
$\Rightarrow y - 5 = 0$ ecuatia tangentei la graficul functiei in punctul de abscisa $x = 0$.

c) $f(x) = (x^2-1)(x^2-4) = x^4 - 5x^2 + 4$.
Functia $f : R \to R$, $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ este functie polinomiala indefinit derivabila. Pentru a determina punctele de inflexiune ale functiei f trebuie sa determinam punctele in care derivata a doua a functiei f se anuleaza si isi schimba concavitatea

$$f'(x) = 4x^3 - 10x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 10.\ f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{6} \Leftrightarrow x_{,} = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$$

x	$-\infty$				$\sqrt{\frac{5}{6}}$						$\sqrt{\frac{5}{6}}$					$+\infty$
f''(x)	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+

Deci functia f are 2 puncte de inflexiune $x_1 = -\sqrt{\frac{5}{6}}$ si $x_2 = \sqrt{\frac{5}{6}}$.

REZOLVARE PROBLEMA NR.9

a) $f_1(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$A = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

b) $$x(f_1(x))^2 = \frac{x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \int_0^1 x(f_1(x))^2dx = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

c) Fie $$a_n = n\left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \dots + \frac{1}{n^2+n^2}\right) = \frac{n}{n^2}\left(\frac{1}{1+\frac{1^2}{n^2}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1^2}{n^2}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}}\right)$$. a_n este o suma Riemann asociata functiei $f_1(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

corespunzatoare intervalului [0,1], diviziunii $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right)$, $\|\Delta_n\| = \frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ si a

punctelor intermediare $u_k^n = \dfrac{k}{n}$, $k = 1, \dots, n$.

Atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f_1(x)dx = \dfrac{\pi}{4}$.

REZOLVARE PROBLEMA NR.10

<table>
<tr><td>a)</td><td>

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\underset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

rezultă $y=0$ asimptotă orizontală spre ∞

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{x}=\frac{-\infty}{0}=(-\infty)\cdot\frac{1}{0_+}=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$

rezultă $x=0$ asimptotă verticală la dreapta spre $-\infty$

</td><td>2p
1p
1p
1p</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0\Rightarrow 1-\ln x=0\Rightarrow \ln x=1\Rightarrow x=e$

<table>
<tr><td>x</td><td>0 e $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>+ 0 –</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$\nearrow$ $\frac{1}{e}$ $\searrow$</td></tr>
</table>

$x=e$ punct de maxim

</td><td>1p
1p
2p
1p</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

$e<\pi$, cum f este descrescătoare pe $(e,+\infty)$ avem $f(e)>f(\pi)$

$\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi}\Rightarrow \pi\ln e>e\ln\pi\Rightarrow \ln(e^{\pi})>\ln(\pi^{e})\Rightarrow e^{\pi}>\pi^{e}$

</td><td>2p
3p</td></tr>
</table>

REZOLVARE PROBLEMA NR.11

1	$\frac{1+3i}{1-3i}+\frac{1-3i}{1+3i}=\frac{(1+3i)^2}{1-(3i)^2}+\frac{(1-3i)^2}{1-(3i)^2}=$ $=\frac{1+6i-9}{10}+\frac{1-6i-9}{10}=\frac{-16}{10}=-\frac{8}{5}$	3p 2p
2	$f(1)+f(2)+f(3)+.....+f(2013)=2^0+2^1+2^2+.....+2^{2012}$ Termenii sumei sunt în progresie geometrică cu $b_1=2^0=1, q=2, n=2013$ $2^0+2^1+2^2+.....+2^{2012}=\frac{1(2^{2013}-1)}{2-1}=2^{2013}-1$	2p 1p 2p
3	$T_{k+1}=C_8^k\sqrt{3}^k=C_8^k 3^{\frac{k}{2}}$ $\frac{k}{2}\in N\Rightarrow k\in\{0,2,4,6,8\}$ deci avem 5 termeni raţionali Dezvoltarea are 9 termeni, aşadar 4 termeni vor fi iraţionali	2p 2p 1p
4	Se impun condiţiile $\begin{cases}x+1\geq 0\\5-x\geq\end{cases}\Rightarrow x\in[-1,5]$ Prin ridicare la puterea a 2-a ecuaţia devine $x+1=25-10x+x^2\Leftrightarrow x^2-11x+24=0$ care are soluţiile $x_1=3\in[-1,5]$ şi $x_2=8\notin[-1,5]$	2p 1p 2p
5	$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(4-a+1)^2+(4+a-2)^2}$ $\sqrt{(5-a)^2+(2+a)^2}=5$ $25-10a+a^2+4+4a+a^2=25$ $2a^2-6a+4=0\Leftrightarrow a^2-3a+2=0$ $a_1=1$ şi $a_2=2$ soluţii	1p 1p 1p 1p 1p
6	$\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow\sin^2 x+\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2=1\Rightarrow\sin^2 x=\frac{1}{25}$ Cum $\sin x<0$ pentru $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ obţinem $\sin x=-\frac{1}{5}$	3p 2p

REZOLVARE PROBLEMA NR.12

a)	$\det A = 0 - 2 + 2 + 0 + 0 + 0 =$ $= 0$	4p 1p
b)	$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$	2p
	$A^2 + 6I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	1p
	$A(A^2 + 6I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2p
c)	$I_3 + xA^2 = \begin{pmatrix} 1-2x & 2x & 2x \\ 2x & 1-5x & x \\ 2x & x & 1-5x \end{pmatrix}$	2p
	$\det(I_3 + xA^2) = (1-2x)(1-5x)^2 + 4x^3 + 4x^3 - 4x^2(1-5x) - x^2(1-2x) - 4x^2(1-5x) =$ $= 36x^2 - 12x + 1 = (6x-1)^2$	2p
	$\det(I_3 + xA^2) = (6x-1)^2 \geq 0$, $\forall x \in R$	1p

REZOLVARE PROBLEMA NR.13

a)	$x, y \in (3,+\infty) \Rightarrow x - 3 > 0, y - 3 > 0$	2p
	$x \circ y = xy - 3x - 3y + 12 = (x-3)(y-3) + 3 > 3 \Rightarrow x \circ y \in (3,+\infty)$	3p
b)	$x \circ x = x \Rightarrow x^2 - 3x - 3x + 12 = x$ $\Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$	3p
	Cu soluţiile $x_1 = 3$ şi $x_2 = 4$	2p
c)	Verificăm dacă $f(x+y) = f(x) \circ f(y)$	
	$f(x+y) = e^{x+y} + 3$	1p
	$f(x) \circ f(y) = (f(x)-3)(f(y)-3) + 3 = (e^x + 3 - 3)(e^y + 3 - 3) + 3 = e^x \cdot e^y + 3 = e^{x+y} + 3$	1p
	Aşadar f morfism	
	Fie $x_1, x_2 \in R$, din $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{x_1} + 3 = e^{x_2} + 3 \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ deci f injectivă	1p
	Din $f(x) = y \Rightarrow e^x + 3 = y \Rightarrow e^x = y - 3 \Rightarrow x = \ln(y-3) \in R$ pentru $y \in (3,+\infty)$ deci f surjectivă	1p
	Aşadar f bijectivă	
	Cum f este morfism bijectiv rezultă că f este izomorfism de grupuri.	1p

Mult spor!