TEST MATEMATICĂ NR.14(ZECE PROBLEME POSIBILE!) – BACALAUREAT + ADMITERE UPB- recapitulare clasa a XI-a

PROBLEMA NR.1

Se considera polinomul $f = X^3 + X + 2a$, $a \in Z$ si $x_1, x_2, x_3 \in C$, radacinile polinomului.

a) Sa se determine $a \in Z$ astfel incat polinomul f sa fie divizibil cu polinomul $g = X - a$

b) Sa se arate ca determinantul $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ nu depinde de a.

c) Sa se arate ca polinomul f are o singura radacina reala.

PROBLEMA NR.2

Fie functia $f: (0,+\infty) \to R$, $f(x) = x \cdot \ln x$

a) Sa se calculeza $\lim_{x\to 1} (1+f(x))^{\frac{1}{x-1}}$.

b) Sa se arate ca derivata functiei f este crescatoare pe $(0,+\infty)$.

c) Sa se demonstreze ca $1 + \ln k < (k+1)\ln(k+1) - k\ln k < 1 + \ln(k+1)$, $\forall k \geq N^*$.

PROBLEMA NR.3

1. Pentru fiecare număr natural n, $n \geq 3$, se consideră funcția $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

5p a) Calculați $f_n'(1)$.

5p b) Arătați că ecuația $f_n(x) = 0$ are exact două soluții în intervalul $(0,+\infty)$.

5p c) Fie a_n unica soluție din intervalul $(0,1)$ a ecuației $f_n(x) = 0$. Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

PROBLEMA NR.4

Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x \, dx$.

5p a) Calculați I_1.

5p b) Arătați că $\frac{1}{n+1} I_{n+1} + nI_{n-1} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n$, pentru orice număr natural $n \geq 2$.

5p c) Calculați $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

PROBLEMA NR.5

Pentru $n \in N^*$ se consideră funcția $F_n : (0,\infty) \to R, F_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt, x > 0$.

5p. a) Să se calculeze $F_1(x), x > 0$;

5p. b) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției F_n;

5p. c) Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} F_2(x)$.

PROBLEMA NR.6

Considerăm matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

5p a) Arătaţi că $\det A \neq 0$.

5p b) Arătaţi că inversa matricei A este matricea B.

5p c) Verificaţi dacă $(A^n + A)(B^n - B) = B^{n-1} - A^{n-1}$ pentru orice număr natural $n \geq 2$.

PROBLEMA NR.7

Considerăm polinomul $f = X^4 - 2X^3 + X^2 - 4 \in \mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3, x_4.

5p a) Arătaţi că restul împărţirii polinomului f la $X-1$ este -4.

5p b) Calculaţi câtul împărţirii polinomului f la polinomul $(X-1)^2$.

5p c) Arătaţi că polinomul f are exact două rădăcini reale.

PROBLEMA NR.8

Se consideră funcţia : $f : \mathbb{R} \to (0,\infty),\ f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

5p a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$.

5p b) Determinaţi ecuaţia asimptotei graficului funcţiei la $-\infty$.

5p c) Demonstraţi că, pentru orice număr real $m > 0$, ecuaţia $f(x) = m$ are o unică soluţie în $\mathbb{R}$.

PROBLEMA NR.9

Pentru n natural nenul se defineşte $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

5p a) Calculaţi I_1.

5p b) Arătaţi că şirul I_n este convergent.

5p c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(e^{\frac{1}{n}} + 2e^{\frac{2}{n}} + \ldots + ne^{\frac{n}{n}}\right)$.

PROBLEMA NR.10

Pentru fiecare n număr natural nenul, se consideră funcţia $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*,\ f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+5n}}$.

5p a) Calculaţi $\int 2x \cdot f_n^2(x)dx,\ x > 0$.

5p b) Calculaţi aria mulţimii mărginite de graficul funcţiei f_1, axele de coordonate şi dreapta $x = 1$.

5p c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(f_n(1) + f_n(2) + \ldots + f_n(n)\right)$.

Mult Succes!

REZOLVARE PROBLEMA NR.1

a) $(X-a)\mid f \Leftrightarrow f(a)=0 \Leftrightarrow a^3+a+2a=0 \Leftrightarrow a(a^2+3)=0 \Rightarrow a=0\in \mathbb{Z}$.

b) Din relatiile lui Viete $x_1+x_2+x_3=0$

$$d=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0$$

(am adunat la prima linie, liniile 2 si 3)

---

c) Polinomul are coeficientii numere reale $\Rightarrow$ daca polinomul are radacini complexe atunci numarul lor este par. Deci polinomul f poate avea sau o singura radacina reala sau 3 radacini reale. Presupunem ca polinimul are 3 radacini reale, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

$(x_1+x_2+x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$

Conform relatiilor lui Viete avem $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1 \Rightarrow \\ x_1x_2x_3=-2a \end{cases}$

$\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2 = -2 < 0$ contradictie cu $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

Deci presupunerea este falsa $\Rightarrow$ polinomul f are doar o radacina reala.

REZOLVARE PROBLEMA NR.2

a) $\lim\limits_{x\to1}\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{x\to1}\left(1+x\ln x\right)^{\frac{1}{x-1}}$ (Cazul 1^∞) $= \lim\limits_{x\to1}\left(1+x\ln x\right)^{\frac{1}{x\ln x}\cdot\frac{x\ln x}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{x\ln x}{x-1}}$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x}{x-1}$ (cazul $\frac{0}{0}$, aplicam l'Hospital pentru functiile $f(x)=x\ln x$ si $g(x)=x-1$ care sunt derivabile si $g'(x)\neq0$ pe orice vecinatate a lui 1) $= \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x+1}{1} = 1$

Deci $\lim\limits_{x\to1}\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{x\ln x}{x-1}} = e$.

b) Functia f este de doua ori derivabila pe $(0,\infty)$ si $f'(x)=\ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} = \ln x+1$

iar $f''(x)=\dfrac{1}{x}>0\ \forall x\in(0,+\infty) \Rightarrow f'(x)$ este crescatoare pe $(0,+\infty)$.

c) Fie $k\geq N^*$ orecare. Consideram intervalul $[k, k+1]\subset(0,+\infty)$ si restrictia lui f la acest interval.

f este continua si derivabila pe $[k, k+1] \overset{\text{cf T Lagrange}}{\Rightarrow} \exists\ c\in(k, k+1)$ astfel incat

$\dfrac{f(k+1)-f(k)}{k+1-k} = f'(c) \Leftrightarrow (k+1)\ln(k+1) - k\ln k = \ln c+1$

$k<c<k+1$ si functia $f'(x)$ crescatoare pe $[k, k+1]$ (din b)) $\Rightarrow \ln k+1 < \ln c+1 < \ln(k+1)+1$

$\Leftrightarrow$ 1 + ln k < (k + 1)ln(k + 1) – kln k < 1 + ln (k + 1), unde k $\geq$ N^* oarecare.

Deci 1 + ln k < (k + 1)ln(k + 1) – kln k < 1 + ln (k + 1), $\forall$ k $\geq$ N^*.

REZOLVARE PROBLEMA NR.3

a)	$f_n'(x) = nx^{n-1} - n$ $f_n'(1) = n - n = 0$	**3p** **2p**
b)	$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{n-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ $f_n(0) = 1 > 0,\ f_n(1) = 2 - n < 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ Șirul lui Rolle este $+-+$, deci ecuația $f_n(x) = 0$ are exact două soluții $a_n \in (0,1)$ și $b_n \in (1,+\infty)$	**1p** **2p** **2p**
c)	f_n este continuă și $f_n(0) = 1 > 0,\ f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^n - 1 < 0 \Rightarrow a_n \in \left(0, \frac{2}{n}\right)$ Cum $0 < a_n < \frac{2}{n}, \forall n \geq 3$ și $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$, din teorema cleștelui rezultă $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$	**3p** **2p**

REZOLVARE PROBLEMA NR.4

a)	$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos x)'\,dx = = -x\cos x\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx =$ $= 0 + \sin x\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$	**3p** **2p**
b)	$I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+1}\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+1}(-\cos x)'\,dx = = -x^{n+1}\cos x\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n\cos x\,dx$ $\frac{1}{n+1} I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n(\sin x)'\,dx = x^n\sin x\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}} - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1}\sin x\,dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - nI_{n-1}$	**2p** **3p**
c)	$\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avem $x^n\sin x \geq 0 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n\sin x\,dx \geq \int_1^{\frac{\pi}{2}} x^n\sin x\,dx$ $\forall x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ avem $\sin x \geq \sin 1 \Rightarrow x^n\sin x \geq x^n\sin 1 \Rightarrow \int_1^{\frac{\pi}{2}} x^n\sin x\,dx \geq \sin 1\cdot\int_1^{\frac{\pi}{2}} x^n\,dx$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ avem $I_n \geq \sin 1\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\|_1^{\frac{\pi}{2}} = \sin 1\left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)$ (1) Cu teorema Stolz-Cesaro avem	**1p** **1p** **1p**

	$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}}{n+2-n-1}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=+\infty$	1p
	Cum $\sin 1>0$ avem $\lim_{n\to+\infty}\sin 1\cdot\left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)=+\infty$	1p
	Folosind teorema cleştelui în relaţia (1) rezultă $\lim_{n\to+\infty}I_n=+\infty$.	

REZOLVARE PROBLEMA NR.5

a) $F_1(x)=\int_0^x te^{-t}dt=1-(x+1)\cdot e^{-x}$ **(5p)**

b) $F_n'(x)=x^n\cdot e^{-x}, x>0$ **(2p)** $F_n''(x)=x^{n-1}\cdot e^{-x}\cdot(n-x), x>0\Rightarrow$ punctul de inflexiune este $x=n$ **(3p)**

c) $F_2(x)=\int_0^x e^{-t}t^2dt=-\frac{x^2}{e^x}-\frac{2x}{e^x}-\frac{2}{e^x}+2$, deci limita cerută este egală cu 2 **(5p)**

REZOLVARE PROBLEMA NR.6

a)	$\det A=1+2+0-2-0-0$ $\det A=1\neq 0$	**3p** **2p**
b)	$AB=I_3$ $BA=I_3$ Deoarece $AB=I_3$ şi $BA=I_3$, inversa matricei A este matricea B	**2p** **2p** **1p**
c)	$(A^n+A)(B^n-B)=A^nB^n-A^nB+AB^n-AB$ $AB=I_3, A^nB=A^{n-1}I_3=A^{n-1}, AB^n=I_3B^{n-1}=B^{n-1}$ Din $AB=BA$ reiese $A^nB^n=(AB)^n=I_3$. Finalizare	**1p** **2p** **1p** **1p**

REZOLVARE PROBLEMA NR.7

a)	Restul este $f(1)$ $f(1)=-4$	**2p** **3p**
b)	$f=X^2(X-1)^2-4$ Deoarece $\text{grad}(-4)=0<2=\text{grad}(X-1)^2$, câtul împărţirii este X^2 şi restul este -4	**3p** **2p**
c)	$f=(X^2-X)^2-4=(X^2-X+2)(X^2-X-2)$	**3p**
	$x_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}, x_3=-1\in\mathbb{R}, x_4=2\in\mathbb{R}$	**2p**

REZOLVARE PROBLEMA NR.8

a)	f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=-1$.	**2p** **3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}-1=-2$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$ $y=-2x$ este asimptotă la graficul funcției f spre $-\infty$.	**2p** **2p** **1p**
c)	f continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$ $f'(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$, f strict descrescătoare, deci f injectivă. Finalizare	**2p** **2p** **1p**

REZOLVARE PROBLEMA NR.9

a)	$I_1=\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big\|_0^1-\int_0^1 e^x dx=$ $e-e^x\Big\|_0^1=e-e+1=1$.	**2p** **3p**
b)	$x^n\ge x^{n+1}$, oricare $x\in[0,1]$, se obține $x^ne^x\ge x^{n+1}e^x$, oricare $x\in[0,1]$ și $I_n\ge I_{n+1}$, oricare n natural nenul $x^ne^x\ge 0$, oricare $x\in[0,1]$,deci $I_n\ge 0$. Finalizare.	**2p** **2p** **1p**
c)	Se consideră $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=xe^x$, funcție continuă, șirul de diviziuni $\Delta_n=\left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n}{n}\right)$ cu $\\|\Delta_n\\|\to 0$, respectiv punctele intermediare $\frac{k}{n}\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$, $k=\overline{1,n}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(e^{\frac{1}{n}}+2e^{\frac{2}{n}}+\dots+ne^{\frac{n}{n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}e^{\frac{k}{n}}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx=I_1=1$	**1p** **2p** **2p**

REZOLVARE PROBLEMA NR.10

a.	$\int 2x \cdot f_n^2(x)dx = \int \frac{2x}{2x+5n}dx = \int 1 - \frac{5n}{2x+5n}dx =$ $= x - \frac{5n}{2}\ln(2x+5n) + \mathbb{C}$	**2p** **3p**
b.	$\int \frac{1}{\sqrt{2x+5}}dx = \int \left(\sqrt{2x+5}\right)' dx =$ $= \sqrt{2x+5}\Big\vert_0^1 = \sqrt{7} - \sqrt{5}$	**3p** **2p**
c.	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(f_n(1) + f_n(2) + \ldots + f_n(n)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\frac{k}{n}+5}} =$ $= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+5}}dx = \sqrt{7} - \sqrt{5}$	**3p** **2p**