TEST MATEMATICĂ NR.15(ZECE PROBLEME POSIBILE!) – BACALAUREAT 2013

PROBLEMA NR.1

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x-1}{x-1}$.

5p a) Calculați $f'(x)$ pe $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

5p b) Determinați asimptota la ramura spre $+\infty$ a graficului funcției f.

5p c) Demonstrați că $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{f(a)+f(b)}{2}$, pentru orice a și b strict mai mari decât 1.

PROBLEMA NR.2

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ și notăm cu $I_n=\int_0^1 f^n(x)dx, n\in\mathbb{N}$.

5p a) Calculați aria suprafeței mărginite de graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x=-1$ și $x=1$.

5p b) Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

5p c) Arătați că $2nI_{n+1}-(2n-1)I_n=\frac{1}{2^n}, n\in\mathbb{N}^*$.

PROBLEMA NR.3

Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & m\\ 2 & m & 4\\ m & 4 & 5\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{Z})$ și $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p a) Pentru $m=3$ să se calculeze $\det(A)$.

5p b) Să se determine $m\in\mathbb{Z}$ astfel încât matricea A să aibă rangul 2.

5p c) Pentru $m=3$ să se arate că $\det(A+xI_3)\neq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$.

PROBLEMA NR.4

Se consideră polinoamele $f, g, h\in\mathbb{R}[X], f=X-1, g=X^3-3X^2-6X+a$ și $h=X^5-7X^4+$ $+6X^3+bX^2+cX+d$.

5p a) Arătați că f divide h dacă și numai dacă $b+c+d=0$.

5p b) Pentru $a=8$, determinați $b, c, d\in\mathbb{R}$ astfel încât h să fie divizibil cu g.

5p c) Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile polinomului g să fie în progresie aritmetică.

PROBLEMA NR.5

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p b) Să se arate că $f(x)<\sqrt{2}-1$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{f(\sqrt{1})+f(\sqrt{2})+f(\sqrt{3})+\cdots+f(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.

PROBLEMA NR.6

Se consideră funcțiile $f, F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{-x^2}$ şi $F(x)=\int_1^x f(t)dt$.

5p **a)** Determinați punctele de inflexiune ale graficului funcției F.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p **c)** Să se determine aria suprafeței mărginite de graficul funcției F, axa OX, dreptele $x=0$ şi $x=1$.

PROBLEMA NR.7

Se consideră funcția $f:S_3\to S_3, f(x)=x^2$.

5p a) Să se rezolve în mulțimea S_3 ecuația $x\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

5p b) Să se studieze surjectivitatea funcției f.

5p c) Să se studieze injectivitatea funcției f.

PROBLEMA NR.8

Se consideră polinomul cu coeficienți reali $X^3-3X^2\sqrt{2}+6X+a$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

5p a) Să se determine $a\in\square$ ştiind că polinomul admite o rădăcină rațională.

5p b) Să se calculeze $(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2$.

5p c) Să se determine rădăcinile polinomului, în cazul în care acestea sunt reale.

PROBLEMA NR.9

Se consideră funcția : $f:(0,\infty)\to\square, f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

5p a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(e^{x+1}\right)$.

5p b) Studiați monotonia funcției f.

5p c) Arătați că $n^{n+1}>(n+1)^n$, pentru orice număr natural $n\geq 3$.

PROBLEMA NR.10

Pentru n natural nenul se definește $f_n:(0,\infty)\to\square, f_n(x)=\int\limits_0^x t^n\sqrt{1+t^2}dt$.

5p a) Să se calculeze $f_1(1)$.

5p b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1)$.

5p c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int\limits_0^x t^n\sqrt{1+t^2}dt}{x^{n+2}}$.

Mult Succes!

REZOLVARE PROBLEMA NR.1

a)	$f(x)=x-\frac{1}{x-1}$ $\Rightarrow f'(x)=1+\frac{1}{(x-1)^2}$	2p 3p
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow$ nu există asimptotă orizontală $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=1=m$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0=n$ $y=x$ este asimptota oblică la $+\infty$	1p 3p 1p
c)	$f''(x)=-\frac{2}{(x-1)^3}<0$ pentru $x>1$ Deci f concavă pe $(1,+\infty)\Rightarrow f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{f(a)+f(b)}{2}$, pentru $a,b>1$.	2p 3p

REZOLVARE PROBLEMA NR.2

a)	$A=\int_{-1}^{1}\lvert f(x)\rvert dx$ $=arctgx\Big\vert_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}$	2p 3p
b)	$f^n(x)\in(0,1]\Rightarrow I_n\in(0,1]$, deci şirul e mărginit $I_{n+1}-I_n=\int_0^1 f^n(x)(f(x)-1)dx, f(x)\leq 1\Rightarrow I_{n+1}\leq I_n$, deci este descrescător Deci $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.	2p 2p 1p

c)	$I_n=\int_0^1 x'(x^2+1)^{-n}dx=\frac{x}{(x^2+1)^n}\Big\vert_0^1+n\int_0^1 x(x^2+1)^{-n-1}\cdot 2xdx$ $=\frac{1}{2^n}+2n\int_0^1\frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}dx=\frac{1}{2^n}+2nI_n-2nI_{n+1}$ Rezultă relaţia cerută.	2p 2p 1p

REZOLVARE PROBLEMA NR.3

a)	$m=3\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}$ $\det(A)=0$	1p 4p
b)	$rangA=2\Rightarrow\det(A)=0$ $\det(A)=0\Leftrightarrow(3-m)(m^2+3m-12)=0\Leftrightarrow m=3\in\mathbb{Z}$ sau $m=\dfrac{-3\pm\sqrt{57}}{2}\notin\mathbb{Z}$ finalizare	1p 3p 1p
c)	$\det(A+xI_3)=x(x^2+9x-6)$ $x(x^2+9x-6)=0\Leftrightarrow x=0\notin\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ sau x=$\dfrac{-9\pm\sqrt{105}}{2}\notin\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ finalizare	3p 1p 1p

REZOLVARE PROBLEMA NR.4

a)	f divide h $\Leftrightarrow h(1)=0\Leftrightarrow$ $b+c+d=0$	3p 2p
b)	restul împărțirii polinomului h la polinomul g este polinomul $r=(b-32)X^2+(c+32)X+d$ g divide h $\Leftrightarrow r$ este polinomul nul $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}b=32\\c=-32\\d=0\end{cases}$	3p 1p 1p
c)	$2x_2=x_1+x_3$ $x_1+x_2+x_3=3\Leftrightarrow x_2=1\Leftrightarrow$ $g(1)=0\Leftrightarrow a=8\Rightarrow$ $\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2\\x_3=4\end{cases}$ $-2,\ 1,\ 4$ sunt în progresie aritmetică	1p 1p 1p 1p 1p

REZOLVARE PROBLEMA NR.5

a)	$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	5p
b)	$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{(x^2+1)(x^2+2)}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}\right)}$ f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$ și strict descrescătoare pe intervalul $[0,\infty)$ $f(0)=\sqrt{2}-1$ finalizare	2p 1p 1p 1p
c)	$f(\sqrt{1})+f(\sqrt{2})+f(\sqrt{3})+\cdots+f(\sqrt{n})=\sqrt{n+2}-\sqrt{2}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{n}}=1$	3p 2p

REZOLVARE PROBLEMA NR.6

a)	$F'(x)=e^{-x^2}$ $F''(x)=-2xe^{-x^2}$ demonstrat că $x=0$ este punct de inflexiune	2p 1p 2p
b)	$\int_0^1 xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}\left(-x^2\right)'dx=$ $=\frac{e-1}{2e}$	2p 3p
c)	$aria(\Gamma_F)=\int_0^1 F(x)dx$ $\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1 F(x)x'dx=.$ $=xF(x)\Big\vert_0^1-\int_0^1 xe^{-x^2}dx=\frac{1-e}{2e}$	1p 2p 2p

REZOLVARE PROBLEMA NR.7

a)	$x=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}^{-1}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ Ecuația are soluția unică $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$.	2p 2p 1p
b)	Ecuația $f(x)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ nu are soluții: permutarea $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ este impară iar $f(x)$ este pară. Funcția f nu este surjectivă.	3p 2p
c)	$f(e)=e, f(\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix})=e$, $e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$. f nu este injectivă.	3p 2p

REZOLVARE PROBLEMA NR.8

a)	$\alpha \in \square$ rădăcină implică $f(\alpha)=0$ $\alpha^3-3\alpha^2\sqrt{2}+6\alpha+a=0$ $\alpha^3-6\alpha-a=0$ şi $3\alpha^2=0$ $\alpha=0.$	**1p** **1p** **2p** **1p**
b)	$(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=$ $2(x_1+x_2+x_3)^2-6(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$ Din relaţiile lui Viete se obţine 0.	**2p** **1p** **2p**
c)	Din b) şi din faptul că toate rădăcinile sunt reale rezultă că $x_1=x_2=x_3$ Cum $x_1+x_2+x_3=3\sqrt{2}$ rezultă că $x_1=x_2=x_3=\sqrt{2}$.	**3p** **2p**

REZOLVARE PROBLEMA NR.9

a)	$f(e^{x+1})=\frac{x+1}{e^{x+1}}$. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{e^{x+1}}=0.$	**2p** **3p**
b)	$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ $f'(x)>0$ pe $(0,e)$, $f'(x)<0$ pe (e,∞) . f este crescătoare pe $(0,e)$ şi descrescatoare pe (e,∞) .	**2p** **1p** **2p**
c)	Din b) $f(n+1)<f(n)$, oricare $n\geq 3$. $n^{n+1}>(n+1)^n$, oricare $n\geq 3$.	**2p** **3p**

REZOLVARE PROBLEMA NR.10

a)	$\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,dt \underset{2tdt=dy}{\overset{1+t^2=y}{=}} \frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{y}\,dy$ $=\frac{1}{2}\frac{2}{3}\sqrt{y^3}\Big\vert_1^2=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1).$	**3p** **2p**

b)	$t^n\sqrt{1+t^2} < \sqrt{2}t^n$, oricare $t \in [0,1]$	2p
	$0 < \int_0^1 t^n\sqrt{1+t^2}\,dt < \sqrt{2}\int_0^1 t^n\,dt = \sqrt{2}\frac{1}{n+1}$	2p
	Obținerea limitei 0.	1p
c)	Aplicarea regulii lui l'Hospital	1p
	$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x t^n\sqrt{1+t^2}\,dt}{x^{n+2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^n\sqrt{1+x^2}}{(n+2)x^{n+1}}$	2p
	Finalizare $\frac{1}{n+2}$.	2p

ASA SI LA TINE! DACA NU LE LUCREZI! ... ASA O SA PATESTI! MULT SPOR!