TEST MATEMATICĂ NR.17 (... PROBLEME POSIBILE!...) – BACALAUREAT 2013

PROBLEMA NR.1(SET COMPLET SUBIECTUL I –PROFIL MATE INFO-model oficial 2013)

5p **1.** Arătați că numărul $n=\left(\sqrt{5}-1\right)^2+2\sqrt{5}$ este natural.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+4$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(2-x^2\right)=\log_2 x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile mulțimii $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, aceasta să aibă cel mult un element.

5p **5.** Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+6\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC}=4\vec{i}+6\vec{j}$. Determinați lungimea segmentului $[AC]$.

5p **6.** Se consideră numerele reale a și b astfel încât $a+b=\frac{\pi}{3}$. Arătați că $2\cos b=\cos a+\sqrt{3}\sin a$.

PROBLEMA NR.2

Se notează cu x_1,x_2,x_3 rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului $f=X^3+X-m$, unde m este un număr real.

5p **a)** Determinați m astfel încât restul împărțirii polinomului $f(X)$ la $X-1$ să fie egal cu 8.

5p **b)** Arătați că numărul $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ este întreg, pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

5p **c)** În cazul $m=2$ determinați patru numere întregi a,b,c,d, cu $a>0$, astfel încât polinomul $g=aX^3+bX^2+cX+d$ să aibă rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$.

PROBLEMA NR.3(SET COMPLET SUBIECTUL I –PROFIL MATE INFO)

5p **1.** Determinați numărul real m știind că mulțimile $A=\{2\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+mx+4=0\right\}$ sunt egale.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $3^{\log_3 x}<1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare unul dintre numerele naturale de 2 cifre, acesta să fie format doar din cifre impare.

5p **5.** Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=3\vec{i}+a\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}+(2a-3)\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AB=AC=5$ și $BC=6$.

PROBLEMA NR.4

Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numerele $I_n=\int_0^1 x^n\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx$ și $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

5p **a)** Calculați J_1.

5p **b)** Calculați I_1.

5p **c)** Demonstrați că $J_{2n}-J_{2n+2}=I_{2n}$ pentru orice număr natural nenul n.

PROBLEMA NR.5

Se considera sirul $I_n = \int \frac{x^n}{x^2+4x+5}dx, n\in N, x\in R$

a) Determinati $a\in R$ astfel incat $\frac{1}{x^2+4x+5} \le 2a+3, \forall x\in R$.

b) Calculati $2I_1 + 4I_0$.

c) Sa se stabileasca o relatie de recurenta pentru I_n.

PROBLEMA NR.6

Se considera sirul $(I_n)_{n\ge1}, I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$.

a) Calculati I_2.

b) Demonstrati ca sirul $(I_n)_{n\ge1}$ este convergent.

c) Demonstrati $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$, pentru orice $n\ge 2$.

PROBLEMA NR.7 (eu zic ca aceasta problema va fi data anul acesta!!!)

Fie $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx, n\in \mathbf{N}$.

5p a) Să se arate că $I_{n-1} - I_n = \frac{1}{n\cdot 2^n}, \forall n \ge 1$.

5p b) Să se calculeze I_0 şi să se demonstreze că $I_n = \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot 2^k}, \forall n\ge 1$.

5p c) Să se demonstreze că $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot 2^k} = \ln 2$

PROBLEMA NR.8(SET COMPLET SUBIECTUL I –PROFIL MATE INFO)

5p 1. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \left(\frac{5+2i}{2-5i}\right)^2$.

5p 2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x}$ să se calculeze suma
$S = f(f(-10)) + f(f(-9)) + \ldots + f(f(-1)) + f(f(1)) + \ldots + f(f(9)) + f(f(10))$

5p 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2^2(x^3) - 12\cdot\log_4 x - 3 = 0$.

5p 4. Să se rezolve ecuaţia $C_n^8 = C_n^{10}$.

5p 5. Scrieţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $M(-2,2)$ şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie: $2x - y + 5 = 0$

5p 6. Să se calculeze $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$.

PROBLEMA NR.9

Fie multimea $G = (-1, 1)$ pe care se considera legea de compozitie $x \circ y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ si functia

$f: G \to (0, \infty)$, $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

a) Sa se demonstreze ca legea de compozitie data este asociativa.

b) Sa se demonstreze ca $f(x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \ldots \cdot f(x_n)$, $(\forall) x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$.

c) Sa se calculeze $\dfrac{1}{2} \circ \dfrac{1}{4} \circ \ldots \circ \dfrac{1}{2013}$.

PROBLEMA NR.10

Fie sirul $(I_n)_{n\in N^*}$ dat de $I_n = \int_0^2 (2x - x^2)^n dx$, $\forall n \in N^*$.

a) Sa se calculeze I_1.

b) Sa se demonstreze ca: $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$, $n \geq 2$.

c) Sa se arate ca sirul $(I_n)_{n\in N^*}$ tinde descrescator catre 0.

REZOLVARI TEST NR. 17

REZOLVARE PROBLEMA NR.1

1.	$(\sqrt{5}-1)^2 + 2\sqrt{5} = \left(5 - 2\sqrt{5} + 1\right) + 2\sqrt{5} =$	3p
	$= 6 \in \mathbb{N}$	2p
2.	$f(x) = 0$ are două soluții reale distincte	2p
	$\Delta = m^2 - 16 > 0$	1p
	$m \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$	2p
3.	$2 - x^2 = x$	1p
	$x_1 = 1$, $x_2 = -2$	2p
	x_1 convine şi x_2 nu convine	2p
4.	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$	1p
	Numărul submulțimilor cu cel mult un element este egal cu $C_7^0 + C_7^1 = 8 \Rightarrow 8$ cazuri favorabile	2p
	Numărul submulțimilor mulțimii A este $2^7 = 128 \Rightarrow 128$ de cazuri posibile	1p
	$p = \dfrac{1}{16}$	1p
5.	$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 5\bar{i} + 12\bar{j}$	3p
	$AC = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$	2p
6.	$b = \dfrac{\pi}{3} - a \Rightarrow \cos b = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - a\right) =$	2p
	$= \dfrac{1}{2}\cos a + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin a$, de unde concluzia	3p

REZOLVARE PROBLEMA NR.2

a)	$f(1)=2-m$ $f(1)=8$ Finalizare: $m=-6$	**2p** **2p** **1p**
b)	$x_1+x_2+x_3=0$ şi $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=-2\in\mathbb{Z}$	**2p** **3p**
c)	x_1,x_2,x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3+X-2\Rightarrow$ polinomul $-2X^3+X^2+1$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$ $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ cu $a>0\Rightarrow g=2X^3-X^2+0\cdot X-1$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$ un exemplu este $a=2,\ b=-1,\ c=0,\ d=-1$	**2p** **2p** **1p**

REZOLVARE PROBLEMA NR.3

1.	$x^2+mx+4=0$ are soluţia $x=2\ \Rightarrow m=-4$ Pentru $m=-4$ cele două mulţimi sunt egale	**3p** **2p**
2.	$x_V=-\frac{b}{2a}=\frac{3}{2}$ $\Delta=1$ $y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{1}{4}$	**2p** **1p** **2p**
3.	Condiţie: $x>0$ $3^{\log_3 x}<3^0 \Leftrightarrow x<1$ $x\in(0,1)$	**2p** **2p** **1p**
4.	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$ $\overline{ab}$ cu $a,b\in\{1,3,5,7,9\}$ sunt 25 de numere$\Rightarrow$25 de cazuri favorabile $\overline{ab}$ cu $a\in\{1,2,3,...,9\}$ şi $b\in\{0,1,2,3,...,9\}$ sunt 90 de numere$\Rightarrow$90 de cazuri posibile $p=\frac{5}{18}$	**1p** **2p** **1p** **1p**
5.	$\frac{3}{a}=\frac{a}{2a-3}$ $a^2-6a+9=0$ $a=3$	**2p** **2p** **1p**
6.	$S_{ABC}=12$ $R=\frac{abc}{4S}$ $R=\frac{25}{8}$	**2p** **2p** **1p**

REZOLVARE PROBLEMA NR.4

a)	$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt$	1p
	$J_1 = -\cos t \Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}$	2p
	$J_1 = 1$	2p
b)	$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx$	1p
	$I_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}\Big\vert_0^1$	3p
	$I_1 = \frac{1}{3}$	1p
c)	$J_{2n} - J_{2n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \cos^2 x dx$	2p
	Cu schimbarea de variabilă $\sin x = t$ obținem $J_{2n} - J_{2n+2} = \int_0^1 t^{2n} \cdot \sqrt{1-t^2}\, dt = I_{2n}$	3p

REZOLVARE PROBLEMA NR.5

a) Solutia 1: $x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x+2)^2 + 1 \geq 1 \ \forall x \in R.$

Deci $0 < \frac{1}{x^2+4x+5} \leq 2a + 3 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 \geq \frac{1}{2a+3}$

Fie $f: R \to R,\ f(x) = x^2 + 4x + 5$ **functie de gradul II. Functia are un punct de minim in**

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$ **si valoarea lui f in acest punct este** $f(-2) = 4 - 8 + 5 = 1.$

Deci $\forall x \in R,\ x^2 + 4x + 5 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2+4x+5} \leq 1,\ \forall x \in R \Rightarrow$

$\Rightarrow 1$ **este punct de maxim pentru** $\frac{1}{x^2+4x+5}$.

Deci $\frac{1}{x^2+4x+5} \leq 2a + 3 \Leftrightarrow 1 \leq 2a + 3 \Leftrightarrow -2 \leq 2a \Leftrightarrow a \geq -1 \Leftrightarrow a \in [-1, \infty).$

Solutia 2: Studiem varianta functiei $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+5}$.

$f'(x) = \frac{-2x-4}{x^2+4x+5}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2.\ f(-2) = 1$

x	$-\infty$					-2							$+\infty$
f'(x)	+	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	-	-
f(x)	0				$\nearrow$	1	$\searrow$						0

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2+4x+5} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Deci $\frac{1}{x^2+4x+5} \le 2a+3 \Leftrightarrow 1 \le 2a+3 \Leftrightarrow -2 \le 2a \Leftrightarrow a \ge -1 \Leftrightarrow a \in [-1, \infty)$.

b) $2I_1 + 4I_0 = 2\int \frac{x}{x^2+4x+5}dx + 4\int \frac{1}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{2x}{x^2+4x+5}dx + \int \frac{4}{x^2+4x+5}dx =$

$= \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}dx = \ln(x^2+4x+5) + C.$

c) $x^n = x^n \cdot \frac{x^2+4x+5}{x^2+4x+5} = \frac{x^{n+2}+4x^{n+1}+5x^n}{x^2+4x+5} = \frac{x^{n+2}}{x^2+4x+5} + \frac{4x^{n+1}}{x^2+4x+5} + \frac{5x^n}{x^2+4x+5}$

Deci $\int x^n dx = \int\left(\frac{x^{n+2}}{x^2+4x+5} + \frac{4x^{n+1}}{x^2+4x+5} + \frac{5x^n}{x^2+4x+5}\right)dx =$

$= \int \frac{x^{n+2}}{x^2+4x+5}dx + 4\int \frac{x^{n+1}}{x^2+4x+5}dx + 5\int \frac{x^n}{x^2+4x+5}dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} + C = I_{n+2} + 4I_{n+1} + 5I_n$

REZOLVARE PROBLEMA NR.6

a) $I_2 = \int_0^1 (1-x^2)^2 dx = \int_0^1 (1-2x^2+x^4)dx = \left(x - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = 1 - 2\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$

b) Pentru a arata ca sirul $(I_n)_{n\ge1}$ este convergent trebuie sa aratam ca este monoton si marginit.

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-x^2)^{n+1}dx - \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^1 [(1-x^2)^{n+1} - (1-x^2)^n]dx = \int_0^1 (1-x^2)^n(1-x^2-1)dx =$

$= -\int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx < 0$ deoarece:

$x \in [0, 1] \Rightarrow x^2 \ge 0$ si $(1-x^2)^n \ge 0$. Deci $x^2(1-x^2)^n \ge 0 \Rightarrow \int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx \ge 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx \le 0 \Rightarrow I_{n+1} - I_n \le 0 \Rightarrow I_{n+1} \le I_n \ \forall n \in N, n \ge 1 \Rightarrow$ sirul $(I_n)_{n\ge1}$ este descrescator.

$x \in [0, 1] \Rightarrow (1-x^2)^n \ge 0 \Rightarrow \int_0^1 (1-x^2)^n dx \ge 0 \Rightarrow I_n \ge 0 \ \forall n \in N, n \ge 1 \Rightarrow$ sirul $(I_n)_{n\ge1}$ este marginit inferior de 0.

Deci sirul $(I_n)_{n\ge1}$ este descrescator si marginit inferior rezulta conform Teoremei lui Weisstras ca sirul este convergent.

c) $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^1 (1-x^2)(1-x^2)^{n-1}dx = \int_0^1 (1-x^2)^{n-1}dx - \int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1}dx =$

$= I_{n-1} - \int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1}dx \Rightarrow I_n = I_{n-1} - \int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1}dx \Leftrightarrow I_n = I_{n-1} + \frac{1}{2n}\int_0^1 x[-2nx(1-x^2)^{n-1}]dx$

$\Leftrightarrow I_n = I_{n-1} + \frac{1}{2n}\int_0^1 x[(1-x^2)^n]'dx \Leftrightarrow I_n = I_{n-1} + \frac{1}{2n}\left(x(1-x^2)^n\Big|_0^1 - \int_0^1 (1-x^2)^n dx\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I_n = I_{n-1} + \frac{1}{2n}(0 - 0 - I_n) \Leftrightarrow 2nI_n = 2n I_{n-1} - I_n \Leftrightarrow (2n+1)I_n = 2nI_{n-1}, \ \forall n \ge 2.$

REZOLVARE PROBLEMA NR.7

a) $I_{n-1} - I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n-1} - x^n}{1-x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1} dx = \left. \frac{x^n}{n} \right|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n \cdot 2^n}, \ \forall n \geq 1.$ **(5p)**

b) $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx = -\ln|1-x| \Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$ **(3p)**

$\sum_{k=1}^{n} (I_{k-1} - I_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot 2^k} \Rightarrow I_0 - I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot 2^k} \Rightarrow I_n = \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot 2^k}$ **(2p)**

c) $0 \leq \frac{1}{1-x} \leq 2, \ \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} 2x^n dx = \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} \to 0 \Rightarrow I_n \to 0$ **(4p)**

din (b) rezultă concluzia. **(1p)**

REZOLVARE PROBLEMA NR.8

1.	$\lvert z\rvert = \left\lvert\frac{5+2i}{2-5i}\right\rvert^2 = \frac{\lvert 5+2i\rvert^2}{\lvert 2-5i\rvert^2}$ $\lvert z\rvert = \frac{\left(\sqrt{5^2+2^2}\right)^2}{\left(\sqrt{2^2+(-5)^2}\right)^2} = \frac{29}{29}$ $\lvert z\rvert = 1$	**2p** **2p** **1p**
2.	$(f \circ f)(x) = x$ Finalizare $S = 0$	**2p** **3p**
3.	**CE** : $\{x > 0; x^3 > 0\} \Rightarrow x \in (0, \infty)$ $\log_2^2(x^3) = 9\log_2^2 x$ Ecuaţia devine: $9\log_2^2 x - 6\log_2 x - 3 = 0$, notăm $\log_2 x = t \Rightarrow 3t^2 - 2t - 1 = 0$ $\Rightarrow t_1 = 1, t_2 = -\frac{1}{3}$ **Finalizare** : $x_1 = 2 > 0, x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} > 0$	**1p** **1p** **2p** **1p**
4.	Condiţii de existenţă $n \in \mathbf{N}, n \geq 10$ $C_n^k = C_n^{n-k}$ $n - 8 = 10 \Rightarrow n = 18$	**1p** **2p** **2p**
5.	Notăm dreapta dată cu d şi cea căutată cu $d_1 \Rightarrow m_d = 2$ $d_1 \parallel d \Leftrightarrow m_{d_1} = m_d = 2$ $M \in d_1, m_{d_1} = 2 \Rightarrow d_1 : y - y_M = m_{d_1}(x - x_M) \Rightarrow y - 2 = 2(x+2)$ **Finalizare**: ecuaţia dreptei $d_1 : 2x - y + 6 = 0$	**1p** **2p** **1p** **1p**
6.	$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ $\cos 75^0 - \cos 15^0 = -2\sin\frac{75^0 + 15^0}{2}\sin\frac{75^0 - 15^0}{2}$ Finalizare	**1p** **1p** **3p**

REZOLVARE PROBLEMA NR.9

a) Fie x, y, z$\in$ G oarecare. $x\circ(y\circ z)=x\circ\dfrac{y+z}{1+yz}=\dfrac{x+\dfrac{y+z}{1+yz}}{1+x\dfrac{y+z}{1+yz}}=\dfrac{x+xyz+y+z}{1+yz+xy+xz}=\dfrac{x+y+z+xyz}{1+yz+xy+xz}$

$$(x\circ y)\circ z=\frac{x+y}{1+xy}\circ z=\frac{\dfrac{x+y}{1+xy}+z}{1+\dfrac{x+y}{1+xy}z}=\frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}=\frac{x+y+z+xyz}{1+yz+xy+xz}$$

Deci $x\circ(y\circ z)=(x\circ y)\circ z\ \ \forall\ x,y,z\in M$.

Deci legea „ $\circ$” este asociativa.

b) $f(x_1\circ x_2)=f\left(\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)=\dfrac{1-\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}}{1+\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}}=\dfrac{1+x_1x_2-x_1-x_2}{1+x_1x_2+x_1+x_2}$ (1)

$f(x_1)\cdot f(x_2)=\dfrac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\dfrac{1-x_2}{1+x_2}=\dfrac{1-x_1-x_2+x_1x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2}$ (2)

Din (1) si (2) $\Rightarrow f(x_1\circ x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$.

Presupunem ca $f(x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n)=f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot\ldots\cdot f(x_n)$, $(\forall)x_1,x_2,\ldots,x_n\in G$, $n\in N^*$ si aratam ca $f(x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_{n+1})=f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot\ldots\cdot f(x_{n+1})$, $(\forall)x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\in G$

$f(x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_{n+1})=f((x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n)\circ x_{n+1})=f(x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n)\cdot f(x_{n+1})=$
$=f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot\ldots\cdot f(x_n)\cdot f(x_{n+1})$.

Deci $f(x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n)=f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot\ldots\cdot f(x_n)$, $(\forall)x_1,x_2,\ldots,x_n\in G$, $n\in N^*$.

---

c) Observatie: Credem ca in text trebuie facuta o corectia $\dfrac{1}{2}\circ\dfrac{1}{4}\circ\ldots\circ\dfrac{1}{2012}$ pentru ca dupa cum arata primile fractii toate fractiile ar trebui sa aiba numitorul par.

Notam $x=\dfrac{1}{2}\circ\dfrac{1}{4}\circ\ldots\circ\dfrac{1}{2012}\Rightarrow f(x)=f\left(\dfrac{1}{2}\circ\dfrac{1}{4}\circ\ldots\circ\dfrac{1}{2012}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot f\left(\dfrac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot f\left(\dfrac{1}{2012}\right)\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}\cdot\dfrac{1-\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{6}}\cdot\ldots\cdot\dfrac{1-\frac{1}{2010}}{1+\frac{1}{2010}}\cdot\dfrac{1-\frac{1}{2012}}{1+\frac{1}{2012}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{7}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2009}{2011}\cdot\dfrac{2011}{2013}\Leftrightarrow\dfrac{1-x}{x+1}=\dfrac{1}{2013}\Leftrightarrow x+1=2013-2013x\Leftrightarrow 2014x=2012$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{2012}{2014}\Leftrightarrow x=\dfrac{1006}{1007}\Rightarrow\dfrac{1}{2}\circ\dfrac{1}{4}\circ\ldots\circ\dfrac{1}{2012}=\dfrac{1006}{1007}$.

REZOLVARE PROBLEMA NR.10

a) $I_1 = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$

b) Folosim metoda integrarii prin parti:

$I_n = \int_0^2 (2x - x^2)^n dx = \int_0^2 (2x - x^2)^n (x-1)' dx = (x-1)(2x - x^2)^n \Big|_0^2 -$

$- \int_0^2 n(2x - x^2)^{n-1}(2 - 2x)(x-1)dx = 0 - (-2n)\int_0^2 (2x - x^2)^{n-1}(x-1)^2 dx =$

$= 2n\int_0^2 (2x - x^2)^{n-1}(x^2 - 2x + 1)dx = -2n\int_0^2 (2x - x^2)^n dx + 2n\int_0^2 (2x - x^2)^{n-1} dx = -2n\, I_n + 2n\, I_{n-1}$

$\Rightarrow I_n = -2n\, I_n + 2n\, I_{n-1} \Leftrightarrow (2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$.

c) Penru $x \in (0, 2) \Rightarrow 2x - x^2 > 0 \Rightarrow (2x - x^2)^n > 0$ pentru orice $x \in (0, 2)$ si $n \in N^*$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow I_n > 0$ pentru orice $x \in (0, 2)$ si $n \in N^*$.

Din punctul b) avem relatia $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$, $\Rightarrow I_{n-1} = \frac{2n+1}{2n} I_n \Leftrightarrow I_{n-1} = I_n + \frac{1}{2n} I_n$

$\Rightarrow I_{n-1} > I_n,\ \forall\ n \geq 2 \Rightarrow$ sirul $(I_n)_{n\in N^*}$ este descrescator

Deci $I_1 > I_n > 0\ \forall n \geq 2 \Leftrightarrow \frac{4}{3} > I_n > 0\ \forall n \geq 2 \Rightarrow$ sirul $(I_n)_{n\in N^*}$ este marginit.

Deci sirul $(I_n)_{n\in N^*}$ este monoton si marginit $\Rightarrow$ sirul $(I_n)_{n\in N^*}$ este convergent.

Notam cu ℓ limita sa.

$(I_n)_{n\in N^*}$ descrescator si $I_n > 0\ \forall n \geq 2 \Rightarrow I_n \geq \ell \geq 0$

Din relatia $I_{n-1} = I_n + \frac{1}{2n} I_n$, $n \geq 2$ obtinem

$n = 2 \Rightarrow I_1 = I_2 + \frac{1}{4} I_2$

$n = 3 \Rightarrow I_2 = I_3 + \frac{1}{6} I_3$

....

$n - 1 \Rightarrow I_{n-1} = I_n + \frac{1}{2n} I_n$

Adunam relatiile de mai sus si simplificand obtinem $I_1 = \frac{1}{4} I_2 + \frac{1}{6} I_3 + \ldots + \frac{1}{2n} I_n + I_n$.

$I_1 = \frac{1}{4} I_2 + \frac{1}{6} I_3 + \ldots + \frac{1}{2n} I_n + I_n \geq \frac{1}{4} I_2 + \frac{1}{6} I_3 + \ldots + \frac{1}{2n} I_n \geq \ell\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) =$

$= \ell \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow I_1 \geq \ell \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \ell \leq \frac{2I_1}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)}$

Stim ca $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \infty \Rightarrow \ell \leq 0$.

Din $\ell \geq 0$ si $\ell \leq 0 \Rightarrow \ell = 0$.

Mult spor!