CONCURSUL INTERNAȚIONAL DE MATEMATICĂ "SEVER AUREL GROZE"

Ediţia I, BECLEAN 24-26 mai 2013

SUBIECTE CLASA a VI-a

1) a) Să se demonstreze că mulţimea numerelor naturale N se poate scrie ca reuniunea a două submulţimi nevide disjuncte A şi B cu proprietatea că produsul oricăror două elemente distincte din A, respectiv B este un element din A, respectiv B.

b) Să se demonstreze că mulţimea numerelor naturale nenule N nu se poate scrie ca reuniunea a două submulţimi disjuncte A şi B , fiecare din mulţimile A şi B având cel puţin două elemente, cu proprietatea că suma oricăror două elemente distincte din A, respectiv B este un element din A, respectiv B.

2) Aflaţi numerele naturale nenule $a_1; a_2; ......; a_{2013}$ pentru care:

$$\frac{1\cdot 2}{a_1\cdot a_2}=\frac{2\cdot 3}{a_2\cdot a_3}=....=\frac{2012\cdot 2013}{a_{2012}\cdot a_{2013}} \quad \text{şi} \quad a_1+a_2+a_3+......+a_{10}=40.$$

3) Fie triunghiul obtuzunghic ABC, (m($\angle$BAC)>90^0).Determinaţi măsura unghiului ABC ştiind că există în planul triunghiului un punct M cu proprietăţile:

i) (CA este bisectoarea unghiului BCM;

ii) [AB] $\equiv$ [AM];

iii) BC = AM + MC.

G.M./2012.

Notă:

Pentru fiecare problemă se acordă 7 puncte.

Timp de lucru: 2 ore

Succes !

CONCURSUL INTERNAȚIONAL DE MATEMATICĂ "SEVER AUREL GROZE"

Ediţia I, BECLEAN 24-26 mai 2013

Barem de evaluare și notare clasa a VI-a

1) a) A={n∈**N**| n par}, B={n∈**N**| n impar}
par x par=par $\Rightarrow$ ab∈A, $\forall$ a,b∈A 1p

impar x impar=impar , ab∈B, $\forall$ a,b∈B 1p

$A\cap B=\phi, A\cup B=\mathbf{N}\Rightarrow$ A, B verifică condiţiile cerute 1p

b) Presupunem prin absurd că există o astfel de partiţie.

Cum $A\cup B=\mathbf{N}\Rightarrow$ 1∈A sau 1∈B. Fie 1∈A.

Cum A conţine minim 2 elemente, putem nota cu p=min{n∈A|n$\neq$ 1} 1p

1∈A, p∈A$\Rightarrow$ p+1∈A$\Rightarrow$ p+2∈A ş.a.m.d 1p

Cum $A\cup B=\mathbf{N}\Rightarrow$ B={2,3,...,p-1}, dar B are minim 2 elemente,

deci p$\geq$4 1p

Dar p-1∈B, p-2∈B $\Rightarrow$ p-1+p-2=2p-3∈B. Însă 2p-3$\geq$p$\Rightarrow$ 2p-3∈A.

Contradicţie! 1p

2) Din $\frac{1\cdot 2}{a_1\cdot a_2}=\frac{2\cdot 3}{a_2\cdot a_3}\Rightarrow a_3=3a_1;\ \frac{3\cdot 4}{a_3\cdot a_4}=\frac{4\cdot 5}{a_4\cdot a_5}\Rightarrow$
$a_5=5a_1,\ldots, a_{2013}=2013a_1$ 2p
Din $\frac{2\cdot 3}{a_2\cdot a_3}=\frac{3\cdot 4}{a_3\cdot a_4}\Rightarrow a_4=2a_2;\ \frac{4\cdot 5}{a_4\cdot a_5}=\frac{5\cdot 6}{a_5\cdot a_6}\Rightarrow$
$a_6=3a_2,\ldots\ldots, a_{2012}=1006a_2\Rightarrow$ 2p
cum $a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_{10}=40\Rightarrow$
a_1 (1+3+5+7+9)+ a_2(1+2+3+4+5)=40$\Rightarrow 25a_1+15a_2=40$ 2p
Dar $a_1\geq 1$ si $a_2\geq 1\Rightarrow 25a_1+15a_2\geq 40\Rightarrow$
$a_1=a_2=1\Rightarrow a_3=3\ldots a_{2013}=2013$ şi $a_4=2\ldots a_{2012}=1006$ 1p

3) Construim N∈[BC] a.î. NC=MC.
Atunci ΔANC≡AMC (L.U.L.) $\Rightarrow$ AN=AM (1) 2p

BC=AM+MC$\Rightarrow$ BN+NC=AM+MC$\Rightarrow$ BN=AM (2) 2p

Cum AB=AM, din (1) şi (2)$\Rightarrow$ ΔABN echilateral $\Rightarrow$m($\angle$ ABC)=60° 3p