**Rezolvarea subiectului de la**

**Examenul de bacalaureat naţional 2013 – sesiunea specială**
**Proba E. c)**

**Matematică M_*mate-info***

prezentare de **ROMEO ZAMFIR**

**Subiectul I**

**1.** Avem că $2\cdot x+2=\frac{1+7}{2}\Leftrightarrow 2\cdot x+2=4\Leftrightarrow 2\cdot x=2\Leftrightarrow x=1$. Răspuns: $x=1$.

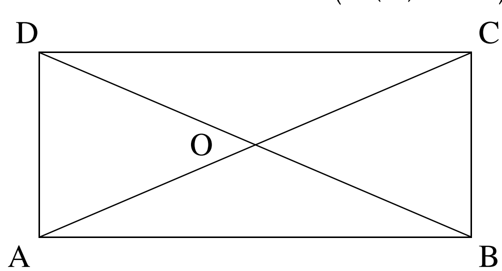
**2.** Trebuie să rezolvăm ecuaţia $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-4\cdot x+3=0$. Avem că $\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=4$ şi $x_{1/2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1}\Leftrightarrow x_{1/2}=\frac{4\pm 2}{2}\Leftrightarrow x_1=\frac{4-2}{2}=1$ şi $x_2=\frac{4+2}{2}=3$. Am obţinut că $f(x)=0\Leftrightarrow x=1$ sau $x=3$ Prin urmare, punctele de intersecţie dintre graficul funcţiei $f$ şi axa $Ox$ sunt $A(1;0)$ şi $B(3;0)$, iar distanţa dintre $A$ şi $B$ este egală cu $d(A,B)=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{(1-3)^2+(0-0)^2}=2$.
Răspuns: $d(A,B)=2$.

**3.** Avem condiţia $x+2\geq 0\Leftrightarrow x\geq -2\Leftrightarrow x\in[-2;+\infty)$. Deci, ecuaţia trebuie rezolvată în mulţimea $[-2;+\infty)$. Avem că $\sqrt{x^2+4}=x+2\Leftrightarrow x^2+4=(x+2)^2\Leftrightarrow x^2+4=x^2+4\cdot x+4\Leftrightarrow 0=4\cdot x\Leftrightarrow x=0\in[-2;+\infty)$.
Răspuns: $x=0$.

**4.** Avem că $a\in\{2;3;4;5\}$ şi $b\in\{3;5\}$, de unde rezultă că pentru $a$ avem 4 valori posibile şi pentru $b$ avem 2 valori posibile, deci pentru $\overline{ab}$ avem $4\times 2=8$ numere impare, din care numerele 33 şi 55 nu convin, deoarece nu respectă condiţia $a\neq b$. Răspuns: $8-2=6$ numere.

Altfel, deducem că numerele care îndeplinesc condiţiile problemei sunt 23, 25, 35, 43, 45 şi 53. Răspuns: 6 numere.

**5.** Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul $\Delta ABC$ $\left(m\left(\widehat{A}\right)=90^0\right)$ obţinem




$AC^2=AB^2+BC^2=6^2+8^2=10^2$, de unde deducem că $AC=10$. Mai departe, avem că $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AO}=2\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AO}=3\cdot\overrightarrow{AO}$. Deci, $\left|\vec{v}\right|=\left|3\cdot\overrightarrow{AO}\right|=3\cdot\left|\overrightarrow{AO}\right|=3\cdot AO=$ $=3\cdot\frac{AC}{2}=3\cdot\frac{10}{2}=15$. Răspuns: $\left|\vec{v}\right|=15$.

**6.** Aplicând teorema sinusurilor în triunghiul $\Delta ABC$ deducem că $\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}\Leftrightarrow\frac{6}{\frac{3}{5}}=\frac{10}{\sin A}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin A=\frac{10\cdot\frac{3}{5}}{6}\Leftrightarrow\sin A=1$. Răspuns $\sin A=1$.

**Subiectul al II-lea**

**1. a)** Avem că $A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, de unde $\det A(0)=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}\overset{C_1+C_2+C_3}{=}\begin{vmatrix}2&1&1\\2&0&1\\2&1&0\end{vmatrix}\overset{\substack{L_2-L_1\\L_3-L_1}}{=}\begin{vmatrix}2&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=$

$=2\cdot(-1)\cdot(-1)=2$. Răspuns: $\det A(0)=2$.

**Observaţie.** Am folosit proprietatea că dacă un determinant are toate elementele situate sub diagonala principală egale cu 0 sau toate elementele situate deasupra diagonalei principale egale cu 0, atunci determinantul este egal cu produsul elementelor de pe diagonala principală.

**b)** Avem că $5\cdot A(a)-(A(a))^2=4\cdot I_3\Leftrightarrow 5\cdot\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a^2+2&2\cdot a+1&2\cdot a+1\\2\cdot a+1&a^2+2&2\cdot a+1\\2\cdot a+1&2\cdot a+1&a^2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-a^2+5\cdot a-2&4-2\cdot a&4-2\cdot a\\4-2\cdot a&-a^2+5\cdot a-2&4-2\cdot a\\4-2\cdot a&4-2\cdot a&-a^2+5\cdot a-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-a^2+5\cdot a-2=4\\4-2\cdot a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-5\cdot a+6=0\\a=2\end{cases}\Leftrightarrow a=2.$

Răspuns: $a=2$.

**c)** Notăm $T=A(2)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. Matricea $T$ este inversabilă $\Leftrightarrow\det T\neq 0$.

$\det T=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}\overset{C_1+C_2+C_3}{=}\begin{vmatrix}4&1&1\\4&2&1\\4&1&2\end{vmatrix}\overset{\substack{L_2-L_1\\L_3-L_1}}{=}\begin{vmatrix}4&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=4\cdot1\cdot1=4$, de unde rezultă că matricea $T=A(2)$ este inversabilă. Prin calcul,, deducem că:

$T_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3\qquad T_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=-1\qquad T_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1$

$T_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=-1\qquad T_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3\qquad T_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=-1$

$T_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1\qquad T_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=-1\qquad T_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3$ .

Deci, matricea adjunctă este $T^*=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$ şi $T^{-1}=\frac{1}{\det T}\cdot T^*=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

Altfel, folosind subpunctul b) şi folosind în continuare notaţia $T=A(2)$ avem că $5\cdot A(2)-(A(2))^2=4\cdot I_3\Leftrightarrow 5\cdot T-T^2=4\cdot I_3\Leftrightarrow T\cdot(5\cdot I_3-T)=(5\cdot I_3-T)\cdot T=4\cdot I_3\Leftrightarrow T\cdot\left[\frac{1}{4}(5\cdot I_3-T)\right]=$

$=\left[\frac{1}{4}\cdot(5\cdot I_3-T)\right]\cdot T=I_3$, de unde deducem, în baza definiţiei matricei inversabile, că $T^{-1}=\frac{1}{4}\cdot(5\cdot I_3-T)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow T^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\left[5\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\right]\Leftrightarrow T^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}\Leftrightarrow T^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

Răspuns: inversa matricei $A(2)$ este matricea $\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

**2. a)** Avem că $f(2)=2^3-m\cdot 2^2+3\cdot 2-1=13-4\cdot m$ şi $f(-2)=(-2)^3-m\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)-1=-15-4\cdot m$, de unde rezultă că $f(2)-f(-2)=13-4\cdot m-(-15-4\cdot m)=28$

**b)** Din ipoteza că restul împărţirii polinomului $f$ la $X-2$ este egal cu 9 deducem, din teorema restului, că $f(2)=9\Leftrightarrow 13-4\cdot m=9\Leftrightarrow m=1$. Mai departe, restul împărţirii lui $f$ la $X+2=X-(-2)$ este egal cu $f(-2)=-15-4\cdot m=-15-4\cdot 1=-19$. Răspuns: $-19$.

**c)** Din relaţiile lui Viete obţinem $\begin{cases}s_1=x_1+x_2+x_3=m\\ s_2=x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+x_3\cdot x_1=3\\ s_3=x_1\cdot x_2\cdot x_3=1\end{cases}$, de unde deducem că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2\cdot(x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+x_3\cdot x_1)=s_1^2-2\cdot s_2=m^2-2\cdot 3=m^2-6$.

Folosind formula $a^3+b^3+c^3-3\cdot abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$, pentru orice $a,b,c\in\mathbb{C}$ obţinem că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3\cdot s_3+s_1\cdot\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-s_2\right)=3\cdot 1+m\cdot\left(m^2-6-3\right)=m^3-9\cdot m+3$.

Deci, $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3\Leftrightarrow m^3-9\cdot m+3=3\Rightarrow m\cdot(m-3)\cdot(m+3)=0\Leftrightarrow m\in\{-3;\ 0;\ 3\}$. Răspuns: $m\in\{-3;0;3\}$.

Altfel, pentru calculul $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ putem proceda astfel: deoarece $x_1,x_2$ şi $x_3$ sunt rădăcinile ecuaţiei obţinem

$$\begin{aligned}&x_1^3-m\cdot x_1^2+3\cdot x_1-1=0 &&(1)\\ &x_2^3-m\cdot x_2^2+3\cdot x_2-1=0 &&(2)\,.\\ &x_3^3-m\cdot x_3^2+3\cdot x_3-1=0 &&(3)\end{aligned}$$

Adunând ecuaţiile $(1),(2)$ şi $(3)$ obţinem

$x_1^3+x_2^3+x_3^3-m\cdot\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+3(x_1+x_2+x_3)-3=0\Leftrightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3-m\cdot\left(m^2-6\right)+3\cdot m-3=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3=m^3-9\cdot m+3$.

Mai departe, $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3\Leftrightarrow m^3-9\cdot m+3=3\Rightarrow m\cdot(m-3)\cdot(m+3)=0\Leftrightarrow m\in\{-3;\ 0;\ 3\}$.

**Subiectul al III-lea**

**1. a)** Prin calcul, deducem $f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)'}{\dfrac{1-x}{1+x}}=\dfrac{\dfrac{(1-x)'\cdot(1+x)-(1-x)\cdot(1+x)'}{(1+x)^2}}{\dfrac{1-x}{1+x}}=\dfrac{\dfrac{(-1)\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2}}{\dfrac{1-x}{1+x}}=$

$=\dfrac{\dfrac{-2}{(1+x)^2}}{\dfrac{1-x}{1+x}}=\dfrac{-2}{(1-x)\cdot(1+x)}=\dfrac{2}{x^2-1}$, pentru orice $x\in(-1;1)$. Răspuns: $f'(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$, $\forall x\in(-1;1)$.

**b)** Pentru $x\in(-1;1)$ avem că $|x|<1\Leftrightarrow|x|^2<1^2\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow x^2-1<0$, de unde rezultă că $f'(x)=\dfrac{2}{x^2-1}<0$, pentru orice $x\in(-1;1)$. Prin urmare, funcţia $f$ este strict descrescătoare pe intervalul $(-1;1)$.

**c)** Avem că $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=\left(u^{-1}\right)'=(-1)\cdot u^{-1-1}\cdot u'=-\dfrac{u'}{u^2}$, unde $u$ este o funcţie derivabilă. Folosind formula $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$ obţinem $f''(x)=\left(f'(x)\right)'=2\cdot\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)'=-2\cdot\dfrac{\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2}=-2\cdot\dfrac{2\cdot x}{\left(x^2-1\right)^2}=-\dfrac{4\cdot x}{\left(x^2-1\right)^2}$, $\forall x\in(-1;1)$.

Deci, $f''(x)=-\dfrac{4\cdot x}{\left(x^2-1\right)^2}$, pentru orice $x\in(-1;1)$.

| $x$ | $-1$ | | | | $0$ | | | $+1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − − − − − | − − − − − | − − − − − | − − − − − | − − − − − | − − − − − | − − − − − | − − − − − |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | ↘ | ↘ | ↘ | ↘ | ↘ | $-\infty$ |
| $f''(x)$ | + + + + + | + + + + + | + + + + + | + + + + + | 0 | − − − − − | − − − − − | − − − − − |

Din tabelul de variaţie a funcţiei $f$ deducem că $f$ este strict descrescătoare (cerinţa de subpunctul b)) şi că $x=0$ este singurul punct de inflexiune a funcţiei $f$, deoarece funcţia $f$ este continuă în $x=0$, convexă pe intervalul $(-1;0]$ şi concavă pe $[0;1)$.

Răspuns: $x=0$ este singurul punct de inflexiune a funcţiei $f$.

**2. a)** Avem că $I_0=\int_1^2 x^0\cdot e^x\,dx=\int_1^2 e^x\,dx=e^x\Big|_1^2=e^2-e$. Răspuns: $I_0=e^2-e$.

**b)** Avem că $I_1=\int_1^2 x\cdot e^x\,dx=\int_1^2 x\cdot\left(e^x\right)'dx=x\cdot e^x\Big|_1^2-\int_1^2 x'\cdot e^x dx=2\cdot e^2-1\cdot e-\int_1^2 e^x dx=2\cdot e^2-e-\left(e^2-e\right)=e^2$.

**c)** Avem că

$I_{n+1}=\int_1^2 x^{n+1}\cdot e^x dx=\int_1^2 x^{n+1}\cdot\left(e^x\right)'dx=x^{n+1}\cdot e^x\Big|_1^2-\int_1^2\left(x^{n+1}\right)'\cdot e^x dx=2^{n+1}\cdot e^2-1^{n+1}\cdot e^1-(n+1)\cdot\int_1^2 x^n\cdot\left(e^x\right)'dx=$

$=2^{n+1}\cdot e^2-e-(n+1)\cdot\int_1^2 x^n\cdot e^x dx=2^{n+1}\cdot e^2-e-(n+1)\cdot I_n$, pentru orice număr natural $n$. Am obţinut că $I_{n+1}=2^{n+1}\cdot e^2-e-(n+1)\cdot I_n\Leftrightarrow I_{n+1}+(n+1)\cdot I_n=2^{n+1}\cdot e^2-e$, $\forall n\in\mathbb{N}$, ceea ce trebuia demonstrat.