

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ

- 25 mai 2013 -

Barem

CLASA a V-a

- Pe liniile $1, 4, 7, \dots, 3k+1$ primul pătrățel este negru
 $100 = 3 \cdot 33 + 1$ deci pe linia 100 primul pătrățel este negru2p
 - Numărul pătrățelelor negre se calculează astfel:
 $1+4+7+\dots+97+100+97+\dots+7+4+1=1717+1617=3334$3p
 Numărul total de pătrățele este 10000.....1p
 Numărul de pătrățele albe este 6666.....1p
- $x+y+z=2013$ și putem considera că $y=2x$, obținând apoi $z=2013-3x$1p
 Se disting cazurile:
 - $x+3y=2115$ – imposibil.....1p
 - $y+3x=2115$ – $x=423$, $y=846$, $z=744$1p
 - $x+3z=2115$ – imposibil.....1p
 - $3x+z=2115$ – imposibil.....1p
 - $y+3z=2115$ – imposibil.....1p
 - $3y+z=2115$ – $x=34$, $y=68$, $z=1911$1p
- Considerăm următoarele 38 de numere: $23: 2323: 232323: \dots \underbrace{232323}_{38 \text{ de } 23} \dots 23$
 Conform principiului cutiei există cel puțin două numere a și b din acest șir care dau același rest la împărțirea cu 37. Rezultă că $a-b$ se divide cu 37.....3p
 Avem: $a-b = \underbrace{2323}_{k \text{ de } 23} \dots \underbrace{23}_{p \text{ de } 23} - \underbrace{2323}_{k-p \text{ de } 23} \dots \underbrace{23}_{2 \text{ p de } 0} = 2323 \dots 23 \cdot 10^{2p}$ 2p
 Cum $(37; 10^{2p}) = 1 \Rightarrow \underbrace{2323 \dots 23}_{k-p \text{ de } 23} = M_{37}$ unde $k > p$ și $p \neq 0$. Acest număr are același număr de 2 și de 3 fiind format din perechi de cifre 23.....2p

CLASA a VI-a

- $A = (1+2013) + 2013^2 \cdot (1+2013) + \dots + 2013^{2012} \cdot (1+2013)$
 $A = 2014 \cdot (1+2013^2 + \dots + 2013^{2012}) \Rightarrow A:19$ 2p
 - $2013A - A = 2013 + 2013^2 + 2013^3 + \dots + 2013^{2014} - 1 - 2013 - 2013^2 - \dots - 2013^{2013}$
 finalizare3p
 - $U(2012 \cdot A) = U(2013^{2014} - 1) = 9 - 1 = 8$
 finalizare2p
- Fie ABC respectivul triunghi și MN una din liniile mijlocii ale triunghiului1p
 Se demonstrează că $d(A, MN) = d(B, MN) = d(C, MN)$ 2p
 - $a+b+c=13$ și punem condiția $1 \leq a, b, c \leq 6$ 1p
 Ținând cont de inegalitatea triunghiului, putem avea cazurile
 $\{1, 6, 6\}; \{2, 5, 6\}; \{3, 4, 6\}; \{3, 5, 5\}; \{4, 4, 5\}$ 3p
- n are $(a+1)(b+1)$ divizori, $2n$ are $(a+2)(b+1)$ divizori, $3n$ are $(a+1)(b+2)$ divizori2p
 Din $(a+2)(b+1) = (a+1)(b+1)+3$ se obține $b=2$ 2p
 Din $(a+1)(b+2) = (a+1)(b+1)+4$ se obține $a=3$ 2p
 Finalizare $n=72$ 1p

CLASA a VII-a

1. $\frac{1}{2013^3} < \frac{1}{2013^2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2013^3} > 1 - \frac{1}{2013^2} = \left(1 - \frac{1}{2013}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2013}\right) = \frac{2012}{2013} \cdot \frac{2014}{2013}$. Analog celelalte paranteze. Obținem: $1 - \frac{1}{2013^3} > \frac{2012}{2013} \cdot \frac{2014}{2013}$; $1 - \frac{1}{2014^3} > \frac{2013}{2014} \cdot \frac{2015}{2014}$, ..., $1 - \frac{1}{n^3} > \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}$ de unde prin înmulțire membru cu membru, obținem inegalitatea cerută.

Barem:

$$\frac{1}{2013^3} < \frac{1}{2013^2} \text{ (1 punct); } 1 - \frac{1}{2013^3} > 1 - \frac{1}{2013^2} \text{ (1 punct); } 1 - \frac{1}{2013^3} > \frac{2012}{2013} \cdot \frac{2014}{2013} \text{ (2 puncte);}$$

Înmulțirea inegalităților, membru cu membru (2 puncte); finalizare: (1 punct).

2. a) Din ipoteză avem $x + y = xy$. Atunci: $\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{4}{x+y}} = \sqrt{\frac{x+y}{xy} - \frac{4}{x+y}} = \sqrt{\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}} = \frac{|x-y|}{x+y} \in \mathbb{Q}$

$$b) \sqrt{3+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}; \sqrt{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

După înlocuire și calcule se arată că numărul este egal cu zero, deci este rațional.

Barem de corectare:

a) 3 puncte

$$b) \sqrt{3+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}} \text{ și analoagele (2 puncte); finalizare (2 puncte)}$$

3. Fie $E \in AD$ astfel încât A și E să fie de o parte și de alta a dreptei BC și $DE = DB$. Rezultă $AE = AC$. Cum $m(\sphericalangle DAC) = 60^\circ$ rezultă că triunghiul ACE este echilateral. În $\triangle DBE$, $DB = DE$ de unde rezultă că $m(\sphericalangle BED) = m(\sphericalangle DBE) = 40^\circ$. Dar $m(\sphericalangle BCE) = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$ deci $\triangle BCE$ este isoscel. Cum $m(\sphericalangle AEB) = 40^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle ABE) = 70^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ABE) - m(\sphericalangle DBE) = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$ și $m(\sphericalangle BAC) = 130^\circ$.

Barem:

Construcția punctului E (3 puncte); $\triangle ACE$ echilateral (2 puncte); finalizare: 2 puncte.

CLASA a VIII-a

1. **Soluție și barem:** a) Avem $\frac{1+bc}{1+a} = \frac{1+bc}{abc+a} = \frac{1+bc}{a(bc+1)} = \frac{1}{a}$.

$$\text{Analog } \frac{1+ac}{1+b} = \frac{1}{b}, \frac{1+ab}{1+c} = \frac{1}{c}, \text{ de unde rezultă concluzia.} \dots 3p$$

b) În inegalitatea $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\text{considerăm } x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}. \text{ Obținem } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}. \dots 2p$$

$$\text{Din } abc = 1 \text{ deducem } \frac{1}{ab} = c = \frac{1+c}{1+ab} \text{ și analoagele.}$$

$$\text{Înlocuind în ultima inegalitate obținem } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1+a}{1+bc} + \frac{1+b}{1+ac} + \frac{1+c}{1+ab}. \dots 2p$$

2. **Soluție și barem:** Ținând cont de ipoteză, putem scrie:

$$x_1^{2013} + x_2^{2013} + \dots + x_n^{2013} = (x_1^{2013} - x_1) + (x_2^{2013} - x_2) + \dots + (x_n^{2013} - x_n) = x_1(x_1^{2012} - 1) + \dots + x_n(x_n^{2012} - 1) \dots 2p$$

Arătăm că numărul $a = x(x^{2012} - 1)$ este divizibil cu 6, pentru orice număr întreg x :

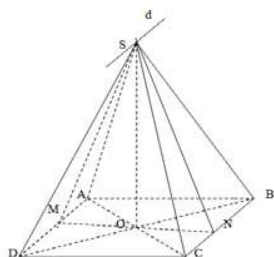
Dacă x este număr impar, rezultă că $x^{2012} - 1$ este număr par, deci cel puțin unul dintre factorii lui a este număr par. $\dots 2p$

Dacă x este divizibil cu 3, rezultă în mod evident $a \div 3$.

Dacă x este de forma $3k \pm 1$, atunci $x^{2012} - 1$ este divizibil cu 3. $\dots 2p$

finalizare $\dots 1p$

3



$\triangle SON$ este dreptunghic $\Rightarrow SN > SO$ și $SN^2 = SO^2 + ON^2$ (1)

$$\text{Cazul 1: } \begin{cases} SN = x + 2 \\ SO = x \\ AB = x + 1 \Rightarrow ON = \frac{x + 1}{2} \end{cases}$$

Relația (1) devine:

$$(x + 2)^2 = x^2 + \left(\frac{x + 1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4(x + 2)^2 - 4x^2 = (x + 1)^2 \Leftrightarrow 4(x + 2 - x)(x + 2 + x) = (x + 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$16(x + 1) - (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(15 - x) = 0 \Rightarrow x = 15, \text{ deoarece } x > 0$$

Deci $a = SN = 17$, $h = SO = 15$, $l = AB = 16$.

$(SBC) \cap (SAD) = d \Rightarrow d \parallel BC \parallel AD$ (conform teoremei acoperișului).

$$\left. \begin{array}{l} SN \perp BC \\ SM \perp AD \\ BC \parallel AD \parallel d \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} SN \perp d \\ SM \perp d \end{cases} \Rightarrow m(\angle((SBC), (SAD))) = m(\angle MSN)^{not} = u.$$

$$A_{\triangle SMN} = \frac{a^2 \cdot \sin u}{2} = \frac{l \cdot h}{2} \Rightarrow a^2 \sin u = l \cdot h \Rightarrow \sin u = \frac{l \cdot h}{a^2} = \frac{16 \cdot 15}{289} = \frac{240}{289}.$$

$$\text{Cazul 2: } \begin{cases} SN = x + 2 \\ SO = x + 1 \\ AB = x \Rightarrow ON = \frac{x}{2} \end{cases} . \text{ Obținem:}$$

$$(x + 2)^2 = (x + 1)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 16x + 16 - 4x^2 - 8x - 4 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 12 = 0 \Rightarrow (x - 4)^2 = 28 ,$$

imposibil în \mathbb{N} .

$$\text{Cazul 3: } \begin{cases} SN = x + 1 \\ SO = x \\ AB = x + 2 \Rightarrow ON = \frac{x}{2} + 1 \end{cases} .$$

$$\text{Avem: } (x + 1)^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + \frac{x^2}{4} + x + 1 \Leftrightarrow x^2 = 4x, x \neq 0 \Rightarrow x = 4.$$

$$\text{Deci } a = SN = 5, h = SO = 4, l = AB = 6 \text{ și } \sin u = \frac{l \cdot h}{a^2} = \frac{6 \cdot 4}{5^2} = \frac{24}{25}.$$

Barem: Justifică $m(\angle((SBC), (SAD))) = m(\angle MSN)$ 1p

Se vor acorda câte 2p pentru tratarea fiecărui caz.

NOTĂ: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.