

EVALUARE ÎN EDUCAȚIE LA MATEMATICĂ

Etapa a III-a – 18.05.2013

Barem de corectare și notare

Clasa a XII-a 4 ore

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul I

1.	$ z = \sqrt{9+16}$ (2p) = 5 (3p)
2.	Ecuția este $x^2 - 3x + 3 = 1$. (1p) Obținem $x_1 = 2$, (2p) și $x_2 = 1$. (2p)
3.	Notând $2^x = t$, ecuația devine $(2t - 1)^2 = 0$. (3p) Avem $t = \frac{1}{2}$, (1p) deci $x = -1$. (1p)
4.	Cum $C_8^5 = C_7^5 + C_7^4$, (2p) obținem $C_8^5 - C_7^5 - C_7^3 = C_7^4 - C_7^3$ (2p) = 0. (1p)
5.	$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -\vec{i} + \vec{j}$. (3p) Modulul este $\sqrt{2}$. (2p)
6.	$\sin a = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. (2p) Atunci $\sin 2a = 2 \sin a \cos a = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$. (3p)

Subiectul II

1.	a) Determinantul matricei sistemului este $-4m + 8$. (5p)
	b) (1,1,0) verifică primele două ecuații. (1p) Din ultima ecuație deducem $3 + m = 5$, (2p) deci $m = 2$. (2p)
	c) Dacă $m \neq 2$, sistemul are soluție unică. (2p) Dacă $m = 2$, cum $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 2$, din teorema lui Kronecker rezultă că sistemul are o infinitate de soluții. (3p)
2.	a) Polinomul f se divide cu $X + 1$ dacă și numai dacă $f(-1) = 0$. (2p) Obținem $m = -4$. (3p)
	b) $f(x) = (x-1)c(x) + f(1)$. (1p) Deducem că $f'(x) = c(x) + (x-1)c'(x)$. (2p) Atunci $c(1) = f'(1) = 32 + m$. (1p) Obținem $m = -30$. (1p)
	c) Restul este de forma $aX + b \in \mathbb{R}[X]$. (1p) Cum $f(i) = ai + b \Rightarrow (m-2)i + 2 = ai + b$, (1p) obținem $a = m - 2, b = 2$. (1p) Restul împărțirii polinomului f la $X^2 + 1$ este $(m-2)X + 2$. (1p) Din condiția de grad obținem $m = 2$. (1p)

Subiectul III

1.	a) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$. (5p)
	b) Avem $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = x \geq x$, (3p) deci $f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0$. (1p) Rezultă că funcția f este descrescătoare. (1p)

	c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-2x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = 0. \text{ (5p)}$
2.	<p>a) $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{2}{x+1} \right) dx \text{ (2p)} = \left(\frac{x^2}{2} - x + 2 \ln(x+1) \right) \Big _0^1 \text{ (2p)} = -\frac{1}{2} + 2 \ln 2. \text{ (1p)}$</p> <p>b) $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \text{ (1p)}$ $\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = 0$, deoarece funcția de sub integrală este impară. (2p) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctg x \Big _{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$, deci integrala este egală cu $\frac{\pi}{2}. \text{ (2p)}$</p> <p>c) Conform teoremei de medie, există $c_n \in (n, n+1)$ astfel încât $\int_n^{n+1} xf(x) dx = (n+1-n)c_n f(c_n) = \frac{c_n^2 + c_n}{c_n^2 + 1}. \text{ (3p)}$ Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} xf(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n^2 + c_n}{c_n^2 + 1} = 1. \text{ (2p)}$</p>

- Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.