

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Națională, Sighișoara, 2 Aprilie 2013**

**CLASA a V-a**

**SUBIECTELE**

**Problema 1.** Un număr natural de patru cifre, diferite două câte două, având forma  $\overline{abcd}$ , se numește *interesant* dacă  $a \cdot d + b \cdot c = 33$ . Arătați că suma tuturor numerelor interesante de patru cifre este multiplu de 11.

**Problema 2.** Considerăm o descompunere a tablei de șah  $8 \times 8$  în  $p$  dreptunghiuri care nu se suprapun, astfel încât fiecare dreptunghi să conțină un număr întreg de pătrățele, dintre care jumătate să fie albe și să nu existe două dreptunghiuri având același număr de pătrățele. Determinați valoarea maximă a lui  $p$ .

**Problema 3.** Fie  $a, b, c, d, x, y, z, t$  cifre astfel încât  $0 < a < b \leq c < d$  și

$$\overline{dcba} = \overline{abcd} + \overline{xyzt}.$$

Determinați toate valorile posibile ale sumei

$$S = \overline{xyzt} + \overline{tzyx}.$$

**Problema 4.** Elevii unei clase merg pe o potecă de munte, unul în spatele celuilalt. Când Andrei a ajuns la cabană, în cabană se aflau deja jumătate din numărul elevilor aflați încă pe traseu. Bianca a sosit a zecea după Andrei, iar după ea au rămas de două ori mai puțini elevi decât cei ajunși înaintea ei la cabană. Câți elevi sunt în acea clasă?

*Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.  
Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.*



Olimpiada Națională de Matematică  
Etapa Națională, Sighișoara, 2 Aprilie 2013

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE, CLASA a V-a

**Problema 1.** Un număr natural de patru cifre diferite două câte două, având forma  $\overline{abcd}$ , se numește *interesant* dacă  $a \cdot d + b \cdot c = 33$ . Arătați că suma tuturor numerelor interesante de patru cifre este multiplu de 11.

*Soluție.* Dacă  $\overline{abcd}$  este număr interesant, atunci și numerele  $\overline{badc}$ ,  $\overline{cdab}$ ,  $\overline{acbd}$ ,  $\overline{bdac}$ ,  $\overline{cadb}$ ,  $\overline{dbca}$  și  $\overline{dcba}$  sunt numere interesante..... **2 p**

Din observația de mai sus deducem că numerele interesante se pot grupa, după această regulă, câte opt..... **2 p**

Avem

$$\overline{abcd} + \overline{badc} + \overline{cdab} + \overline{dcba} + \overline{acdb} + \overline{bdac} + \overline{cadb} + \overline{dbca} = 2222 \cdot (a + b + c + d)$$

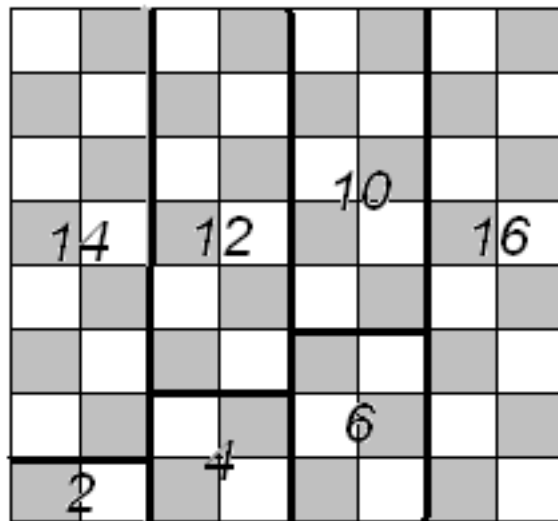
care este multiplu de 11. În concluzie, suma tuturor numerelor interesante de patru cifre este multiplu de 11..... **3p**

**Problema 2.** Considerăm o descompunere a tablei de șah  $8 \times 8$  în  $p$  dreptunghiuri care nu se suprapun, astfel încât fiecare dreptunghi să conțină un număr întreg de pătrățele, dintre care jumătate să fie albe și să nu existe două dreptunghiuri având același număr de pătrățele. Determinați valoarea maximă a lui  $p$ .

*Soluție.* Dacă  $p \geq 8$ , dreptunghiurile vor conține, în total, cel puțin  $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 72$  pătrățele, ceea ce este imposibil, tabla de șah având numai 64 de pătrățele. .... **4 p**

Pentru  $p = 7$  avem posibilitatea să descompunem tabla.

Iată un exemplu: ..... **3 p**



**Problema 3.** Fie  $a, b, c, d, x, y, z, t$  cifre astfel încât  $0 < a < b \leq c < d$  și

$$\overline{dcba} = \overline{abcd} + \overline{xyzt}.$$

Determinați toate valorile posibile ale sumei

$$S = \overline{xyzt} + \overline{tzyx}.$$

*Soluție.* Cum  $\overline{xyzt} = \overline{dcba} - \overline{abcd}$  rezultă  $t = 10 + a - d$ . . . . . **1 p**

Cazul I.

Dacă  $b = c$ , atunci  $z = y = 9$  și  $x = d - a - 1$ . . . . . **1 p**

Cazul II.

Dacă  $b < c$ , atunci  $z = 9 + b - c$ ,  $y = c - b - 1$  și  $x = d - a$ . . . . . **1 p**

Avem  $\overline{xyzt} + \overline{tzyx} = 1001(x + t) + 110(y + z)$ . . . . . **2 p**

În cazul I

$x + t = 9$  și  $y + z = 18$ , de unde  $S = 9009 + 1980 = 10989$ . . . . . **1 p**

În cazul II

$x + t = 10$  și  $y + z = 8$ , de unde  $S = 10010 + 880 = 10890$ . . . . . **1 p**

**Problema 4.** Elevii unei clase merg pe o potecă de munte, unul în spatele celuilalt. Când Andrei a ajuns la cabană, în cabană se aflau deja jumătate din numărul elevilor aflați încă pe traseu. Bianca a sosit a zecea după Andrei, iar după ea au rămas de două ori mai puțini elevi decât cei ajunși înaintea ei la cabană. Câți elevi sunt în acea clasă?

*Soluție.* Să presupunem că Andrei se află pe poziția  $n$ . Atunci înaintea lui sunt  $n - 1$ , iar în urma lui sunt  $2n - 2$  elevi. . . . . **1 p**

Bianca se află pe poziția  $n + 10$ . Înaintea ei sunt  $n + 9$ , iar în urma ei sunt  $\frac{n+9}{2}$ . . . . . **2 p**

Numărul elevilor, raportat la Andrei, este  $n + 2n - 2 = 3n - 2$ .

Numărul elevilor, raportat la Bianca, este  $n + 10 + \frac{n+9}{2}$ .

Obținem ecuația

$$3n - 2 = n + 10 + \frac{n + 9}{2}$$

cu soluția  $n = 11$ . . . . . **3 p**

Numărul de copii este 31. . . . . **1 p**