Societatea de Ştiinţe Matematice din România   Ministerul Educaţiei Naţionale

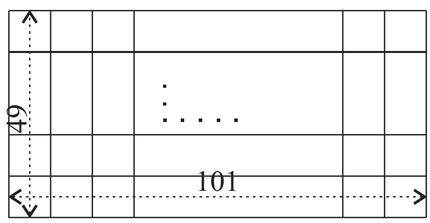
Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Sighişoara, 2 Aprilie 2013

CLASA a VI-a
SUBIECTELE

Problema 1. Ana, Barbu, Carmen şi Dan au de rezolvat 60 de probleme. Ana a rezolvat 45 dintre ele, Barbu a rezolvat 48, Carmen a rezolvat 44, iar Dan a rezolvat 47 de probleme. Arătaţi că probabilitatea ca o problemă din cele 60 să fie rezolvată de toţi cei patru este cel puţin egală cu $\frac{1}{15}$.

Problema 2. Dreptunghiul din figura de mai jos este împărţit în 49×101 pătrate egale. În pătratul din stânga jos se află o monedă. Doi copii imaginează următorul joc: pe rând, fiecare dintre ei mută moneda din locul în care se află pe un pătrat oarecare situat la dreapta, pe aceeaşi linie sau pe un pătrat oarecare situat deasupra, pe aceeaşi coloană. Câştigă jucătorul care plasează moneda în pătratul din dreapta sus.

Arătaţi că primul jucător poate câştiga, oricum ar juca cel de-al doilea.



Problema 3. Se consideră numerele prime $p < q < r$ şi numărul natural nenul $a < p$. Numărul n este cel mai mic număr natural nenul care împărţit la p, q şi r dă, de fiecare dată, restul cu a mai mic decât împărţitorul.

a) Determinaţi, în funcţie de p, q, r şi a, numărul n.

b) Dacă $n = 1000$, determinaţi valorile posibile ale lui a.

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC$ şi $m(\widehat{BAC}) = 90°$. Fie $D \in (BC)$ astfel încât $AD \perp BC$. Bisectoarea unghiului ABC intersectează dreapta AD în punctul I.

Demonstraţi că $BA + AI = BC$.

Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

Societatea de Ştiinţe Matematice din România   Ministerul Educaţiei Naţionale

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Sighişoara, 2 Aprilie 2013

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE, CLASA a VI-a

Problema 1. Ana, Barbu, Carmen şi Dan au de rezolvat 60 de probleme. Ana a rezolvat 45 dintre ele, Barbu a rezolvat 48, Carmen a rezolvat 44, iar Dan a rezolvat 47 de probleme. Arătaţi că probabilitatea ca o problemă din cele 60 să fie rezolvată de toţi cei patru este cel puţin egală cu $\frac{1}{15}$.

Soluţie. Ana nu rezolvă 15 probleme, Barbu nu rezolvă 12 probleme, Carmen nu rezolvă 16 probleme, Dan nu rezolvă 13 probleme. . . . . **2 p**

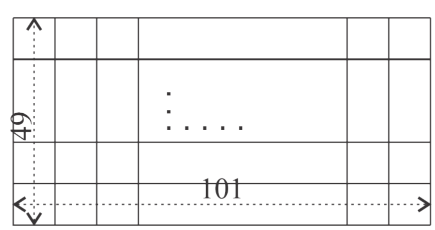
În total, pot rămâne cel mult $15 + 12 + 16 + 13 = 56$ de probleme care să fie nerezolvate de cel puţin un copil. . . . . **2 p**

Cum sunt 60 de probleme, există cel puţin 4 probleme rezolvate de toţi copii. . . . . **2 p**

De aici probabilitatea ca o problemă să fie rezolvată de toţi copii este de cel puţin $\frac{4}{60}$, adică $\frac{1}{15}$. . . . . **1 p**

Problema 2. Dreptunghiul din figura de mai jos este împărţit în 49×101 pătrate egale. În pătratul din stânga jos se află o monedă. Doi copii imaginează următorul joc: pe rând, fiecare dintre ei mută moneda din locul în care se află pe un pătrat oarecare situat la dreapta, pe aceeaşi linie sau pe un pătrat oarecare situat deasupra, pe aceeaşi coloană. Câştigă jucătorul care plasează moneda în pătratul din dreapta sus.

Arătaţi că primul jucător poate câştiga, oricum ar juca cel de-al doilea.



Soluţie.

Câştigă jucătorul care ocupă primul un pătrăţel situat pe diagonala cu capetele în poziţiile $(53, 1)$ şi $(101, 49)$. . . . . **2 p**

Primul jucător mută moneda pe orizontală la dreapta până la poziţia 53. Moneda se va afla în pătratul $(53, 1)$. . . . . **3 p**

Mai departe, la orice mutare efectuată de cel de-al doilea jucător pe o direcţie (orizontală sau verticală) cu un anumit număr de căsuţe, primul jucător mută pe cealaltă direcţie un număr identic de căsuţe, astfel încât să ajungă pe poziţia $(53 + i, i + 1)$ cu $1 \leq i \leq 48$, adică pe diagonala pătratului de latură 49 şi cu unul dintre vârfuri în colţul din dreapta sus, de poziţie $(101, 49)$. . . . . **2 p**

Problema 3. Se consideră numerele prime $p < q < r$ şi numărul natural nenul $a < p$. Numărul n este cel mai mic număr natural nenul care împărţit la p, q şi r dă, de fiecare dată, restul cu a mai mic decât împărţitorul.

a) Determinaţi, în funcţie de p, q, r şi a, numărul n.

b) Dacă $n = 1000$, determinaţi valorile posibile ale lui a.

Soluţie: a) Din enunţ $n = pc_1 + p - a$ sau $n + a = p(c_1 + 1)$, de unde deducem că $p \mid n + a$.

Analog deducem $q \mid n + a$ şi $r \mid n + a$. .... **2 p**

Cum p, q, r sunt numere prime diferite rezultă că $pqr \mid n + a$, de unde $n = pqr - a$. .... **1 p**

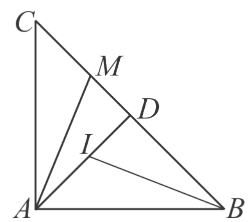
b) $n = 1000$ implică $pqr - a = 1000$. Din $a < p$ rezultă că $pqr - p < 1000$ sau $p(qr - 1) < 1000$. .... **1 p**

Dacă $p \geq 11$, atunci $q \geq 13$ şi $r \geq 17$, de unde $p(qr-1) \geq 11 \cdot (13 \cdot 17 - 1)$, adică $p(qr - 1) \geq 1000$. Deducem că $p \in \{2, 3, 5, 7\}$. .... **1 p**

Deoarece $a < p$ avem $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dacă $a = 1$ obţinem soluţia $p = 7, q = 11, r = 13$. .... **1 p**

Justificarea faptului că celelalte cazuri nu sunt posibile. .... **1 p**

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC$ şi $m(\widehat{BAC}) = 90°$. Fie $D \in (BC)$ astfel încât $AD \perp BC$. Bisectoarea unghiului ABC intersectează dreapta AD în punctul I. Demonstraţi că $BA + AI = BC$.



Soluţie. Triunghiul ABC isoscel de bază $[BC]$ şi $m(\widehat{BAC}) = 90°$ implică $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = 45°$.

Din $[BI$ bisectoarea unghiului ABC rezultă $m(\widehat{ABI}) = m(\widehat{CBI}) = 22°30'$. .... **2 p**

Considerăm punctul $M \in (BC)$ astfel încât $AB = BM$ şi atunci triunghiul ABM este isoscel de bază $[AM]$, de unde $m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{BMA}) = \frac{180° - m(\widehat{ABM})}{2} = \frac{135°}{2} = 67°30'$. .... **2 p**

Avem $m(\widehat{CAM}) = m(\widehat{BAC}) - m(\widehat{BAM}) = 90° - 67°30' = 22°30'$.

În triunghiul isoscel ABC, de bază $[BC]$, cum AD este înălţime rezultă $[AD$ bisectoarea unghiului BAC, de unde $m(\widehat{BAD}) = 45°$.

Din $AB = AC$, $m(\widehat{ABI}) = m(\widehat{CAM}) = 22°30'$ şi $m(\widehat{BAI}) = m(\widehat{ACM}) = 45°$, conform cazului de congruenţă U.L.U. obţinem $\triangle ABI \equiv \triangle CAM$, de unde $AI = CM$.

Avem $BC = BM + MC = AB + AI$. .... **3 p**