INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA-FILIALA CLUJ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ"

Ediţia a XIII-a, 10– 11 MAI 2013

CLASA a IV-a

PROBLEMA nr. 1

Să se efectueze:

$$796:\{18x5+616:[3x2-(7+25:5):3]\}:2$$

***

PROBLEMA nr. 2

Suma a trei numere naturale, aflate in ordine crescătoare, este 200. Primele două numere sunt numere impare consecutive, iar al treilea număr este cu 7 mai mare decât triplul numărului al doilea. Aflaţi numerele.

Eugenia MIRON

PROBLEMA nr. 3

Determinaţi numerele naturale a, b, c ştiind că:

$$a+b:2+c:2=45,\quad a:2+b+c:2=48,\quad a:2+b:2+c=51$$

Vasile ȘERDEAN, Liana JURCĂ

PROBLEMA nr. 4

Într-o pungă sunt 36 de bomboane. Alin îşi serveşte prietenii astfel: primul ia o bomboană, al doilea două bomboane, şi aşa mai departe. Apoi serveşte invers: ultimul ia o bomboană, penultimul ia două bomboane, şi aşa mai departe. Lui Alin îi rămân şase bomboane. Câţi prieteni are Alin?

***

NOTĂ: Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timpul de lucru efectiv este de 2 ore .

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ”

Ediţia a XIII-a, 10– 11 MAI 2013

CLASA a V-a

PROBLEMA nr. 1

Găsiţi toate numerele naturale de două cifre cu proprietatea că diferenţa dintre număr şi răsturnatul său să fie pătrat perfect.

Monica FODOR, Monica DAN

PROBLEMA nr. 2

Să se arate că **nu** există un număr natural nenul *n* astfel încât :

$$1+3+5+\cdots+2n-1=3^{2012}+2012$$

Gheorghe LOBONȚ, Annamaria POP

PROBLEMA nr. 3

Fie mulţimea $A=\{a_1, a_2, a_{3,} a_4, a_5\}$, unde a_k sunt numere natural. Cu elementele mulţimii *A* alcătuim toate sumele posibile de câte două numere distincte.

Este posibil ca sumele obţinute să fie numere naturale consecutive?

Mariana URSU, Ancuța NECHITA

PROBLEMA nr. 4

Considerăm numerele naturale nenule x, y, z astfel încât $7x-4=11z+4y$. Determinaţi restul împărţirii sumei $x+y$ la 11 şi restul împărţirii sumei $y+z$ la 7.

Vasile ȘERDEAN, Simona POP

NOTĂ: Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timpul de lucru efectiv este de 2 ore .

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA-FILIALA CLUJ

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ"

Ediţia a XIII-a, 10– 11 MAI 2013

CLASA a VI-a

PROBLEMA nr. 1

Să se determine numerele naturale a şi b care verifică relaţia: $m-18\cdot d=791$, unde $m=[a,b]$ este cel mai mic multiplu comun iar $d=(a,b)$ este cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b.

Gheorghe LOBONȚ

PROBLEMA nr. 2

Rezolvaţi pe mulţimea numerelor naturale ecuaţia:

$$3xy+7z=21$$

Monica FODOR, Ioan GROZA

PROBLEMA nr. 3

Ştiind că *n* este număr natural nenul

a) Arătaţi că numărul $\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{3}\cdot\frac{n+3}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n+n}{2n-1}$ este natural;

b) Să se determine *n* ştiind că $\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{3}\cdot\frac{n+3}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n+n}{2n-1}=4096$

Vasile ȘERDEAN, Camelia MAGDAȘ

PROBLEMA nr. 4

Fie triunghiul ABC şi $[AD$ bisectoarea unghiului A, $D\in[BC]$. Prin punctul C construim o paralelă la AD care intersectează pe AB în punctul E. Pe prelungirea laturii $[AC]$ se ia punctul F astfel încât $[AF]\equiv[AB]$ şi punctul A să fie situat între C şi F.

a) Să se arate că $\Delta\,ACE$ este isoscel;

b) Să se arate că $BF\parallel AD$;

c) Să se calculeze valoarea raportului $\frac{EF}{BC}$.

Ioan GROZA

NOTĂ: Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timpul de lucru efectiv este de 2 ore .

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „MIHAI VITEAZUL” TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA-FILIALA CLUJ

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ”

Ediţia a XIII-a, 10– 11 MAI 2013

CLASA a VII-a

PROBLEMA nr. 1

Dacă $a = \sqrt{5 - \sqrt{3} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}$ iar $b = \sqrt{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} - 1$ stabiliţi dacă este adevărată apartenenţa „ $\frac{a+b}{a-b} - 2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$ ”.

***

PROBLEMA nr. 2

Determinaţi numerele naturale prime a, b, c pentru care avem

$$a + \frac{b+c}{1+bc} = \frac{148}{5}$$

Vasile ŞERDEAN, Monica FODOR

PROBLEMA nr. 3

În dreptunghiul $ABCD$, bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$ intersectează diagonala BD în F şi latura BC în E. Dacă paralela prin F la DC intersectează diagonala AC în G, demonstraţi că $EG \perp BD$.

Mariana URSU

PROBLEMA nr. 4

Fie triunghiul ABC dreptunghic în A şi AD înălţime, astfel încât $D \in (BC)$. Dacă M şi N sunt mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$, iar E şi F sunt simetricele punctului D faţă de punctele M, respectiv N, demonstraţi că :

a) $\Delta\, MDN \sim \Delta\, BAC$;
b) Punctele E, A şi F sunt coliniare ;
c) $\frac{A_{\Delta\, BDM}}{A_{\Delta\, CDN}} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

Ioan GROZA

NOTĂ: Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA-FILIALA CLUJ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ"

Ediţia a XIII-a, 10– 11 MAI 2013

CLASA a VIII-a

PROBLEMA nr. 1

Să se arate că **nu** există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât: $\sqrt{\frac{5\cdot 36^n+8\cdot 6^n+3}{5\cdot 6^n+3}} \in \mathbb{Q}$.

Gheorghe LOBONȚ

PROBLEMA nr. 2

Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{9}{\sqrt{y}}=1 \\ \frac{112}{5x+y}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{9}{\sqrt{y}} \end{cases}$$

Vasile ȘERDEAN, Cristian POP

PROBLEMA nr. 3

Să se arate că în paralelipipedul dreptunghic în care aria totală este egală cu dublul volumului, are loc inegalitatea:

$$V \geq L\sqrt{lh}+l\sqrt{Lh}+h\sqrt{Ll},$$

unde V reprezintă volumul paralelipipedului, iar L, l, h sunt cele trei dimensiuni ale paralelipipedului.

Vasile ȘERDEAN , Monica FODOR

PROBLEMA nr. 4

Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de lungime a $(a>0)$, iar E mijloc al segmentului $[CC']$.

a) Determinaţi măsura unghiului format de planul $(A'BD)$ şi planul (EBD);
b) Demonstraţi că $OE \parallel (ABD')$ unde $AC \cap BD = \{O\}$;
c) Calculaţi distanţa de la punctul D' la planul $(A'BD)$.

Ioan GROZA, Mirela RAȚIU

NOTĂ: Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „MIHAI VITEAZUL” TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA-FILIALA CLUJ

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ”

Ediţia a XIII-a, 10– 11 MAI 2013

CLASA a IX-a

PROBLEMA nr. 1

Dacă $x, y, z > 0$ şi $x + y + z = 1$, determinaţi maximul expresiei:

$$E(x, y, z) = \frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x}$$

Dorin ANDRICA

PROBLEMA nr. 2

Pe cercul $\mathcal{C}$ se consideră punctele A, B, C, D în această ordine. Notăm r_A, r_B, r_C, r_D razele cercurilor înscrise în triunghiurile BCD, CDA, DAB, ABC şi cu $\rho_A, \rho_B, \rho_C, \rho_D$ razele cercurilor tangente perechilor de laturi CB şi CD, DC şi DA, AD şi AB, respectiv CB şi CD şi tangente interior cercului $\mathcal{C}$.

Să se demonstreze:

$$\frac{r_A}{\rho_A} + \frac{r_C}{\rho_C} = \frac{r_B}{\rho_B} + \frac{r_D}{\rho_D} = 1$$

Daniel VĂCĂREȚU

PROBLEMA nr. 3

Se consideră numerele întregi nenule x şi y astfel încât $|x| \leq 200$ şi $|y| \leq 200$. Să se arate:

$$\left|x\sqrt{5} + y\sqrt{7}\right| \geq \frac{1}{1000}.$$

Gheorghe LOBONȚ

PROBLEMA nr. 4

Fie AB şi CD două coarde perpendiculare ale unui cerc de centru O. Dacă M este punctul de intersecţie dintre AB şi CD, atunci are loc inegalitatea:

$$2MO \leq MA + MB + MC + MD.$$

Dorin ANDRICA

NOTĂ: Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ"

Ediţia a XIII-a, 10– 11 MAI 2013

CLASA a X-a

PROBLEMA nr. 1

Să se calculeze :

$$\sum_{k=1}^{2013}[\log_2 k],$$

unde prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a.

Gheorghe LOBONȚ

PROBLEMA nr. 2

Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale nenule ecuaţia

$$\left(4^x + 5^{\frac{1}{x}} + 3^{x+\frac{1}{x}}\right)\left(5^x + 4^{\frac{1}{x}} + 3^{x+\frac{1}{x}}\right) = 324.$$

Traian TĂMÂIAN

PROBLEMA nr. 3

Fie $A_1A_2 \dots A_n$ un poligon regulat înscris într-un cerc de centru O şi rază R. Să se arate că pentru orice punct M din planul poligonului are loc inegalitatea:

$$MA_1 \cdot MA_2 \cdot \dots \cdot MA_n \leq (OM^2 + R^2)^{\frac{n}{2}}.$$

Dorin ANDRICA

PROBLEMA nr. 4

Pentru un număr natural n, notăm cu a_n numărul funcţiilor liniare $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \{1,2, \dots, n\}$, care au rădăcini întregi. Să se determine a_{100}.

Dorin ANDRICA

NOTĂ: Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA-FILIALA CLUJ

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ"

Ediţia a XIII-a, 10– 11 MAI 2013

CLASA a XI-a

PROBLEMA nr. 1

Fie $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţiile definite prin:

$$f(x) = \begin{cases} x, & dacă\ x \in \mathbb{Q} \\ \sin x, & dacă\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

$g(x) = e^{2x} - 1$.

a) Să se determine mulţimea de derivabiliatate a funcţiei f.

b) Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Dorel I.DUCA

PROBLEMA nr. 2

Să se determine funcţiile $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ştiind că f^2 este derivabilă şi $(f^2)' = f$.

Mihai PITICARI

PROBLEMA nr. 3

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), n \geq 2$, astfel încât:

$$A^{2013} + A^{2014} = O_n.$$

Dacă $B = A + I_n$ demonstraţi că matricea $I_n - AB$ este inversabilă.

Traian TĂMÂIAN

PROBLEMA nr. 4

Pentru un număr natural n, notăm cu a_n numărul funcţiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \{1,2, \dots, n\}$, care au rădăcini întregi. Să se calculeze:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n \ln n}.$$

Dorin ANDRICA, Mihai PITICARI

NOTĂ: Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA-FILIALA CLUJ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

„MARIAN ŢARINĂ"

Ediţia a XIII-a, 10– 11 MAI 2013

CLASA a XII-a

PROBLEMA nr. 1

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 sinx^n\, dx$

***

PROBLEMA nr. 2

Fie I un interval din $\mathbb{R}$ şi $f: I \to \mathbb{R}$ o funcţie continua pe I.

a) Arătaţi că dacă f este convexă pe I, atunci există două funcţii continue $\varphi: I \to \mathbb{R}$ şi $h: [0,1] \to \mathbb{R}$ astfel încât să avem

$$f(t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)) \le h(t)f(x) + h(1-t)f(y), \qquad (*)$$

oricare ar fi $x, y \in I$ şi $t \in [0,1]$.

b) Arătaţi că dacă funcţiile continue $\varphi: I \to \mathbb{R}$ şi $h: [0,1] \to \mathbb{R}$ satisfac relaţia (*), atunci pentru orice $a, b \in I$ cu $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ avem

$$\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \le (f(a)+f(b)) \int_0^1 h(t)dt.$$

Dorel I.DUCA

PROBLEMA nr. 3

Fie $(G, \cdot)$ un grup finit comutativ. Spunem că un element a din G are proprietatea (A) dacă există un subgrup H al lui G astfel încât produsul elementelor din H este egal cu a. Să se arate că mulţimea elementelor lui G cu proprietatea (A) este subgrup al lui G.

Antonia CIOCAN

PROBLEMA nr. 4

Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ un polinom cu n rădăcini reale distincte. Demonstraţi că pentru orice număr real α polinomul $Q(X) = \alpha XP(X) + P'(X)$ are cel puţin $n-1$ rădăcini reale distincte.

Dorin ANDRICA

NOTĂ: Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.