Colegiul National
Vasile Alecsandri
Str Nicolae Balcescu 41, Galati 6200, Romania, Tel:+40236411688, Fax:+40236460135, email:cva@cva-galati.ro

Simularea examenului de bacalaureat la matematică – M1
29.04.2013

Subiectul I (30 puncte)

(5 p) 1. Să se arate că $2\cdot\left(1+3+3^2+...+3^{2012}\right)<3^{2013}$.

(5 p) 2. Să se determine $a\in\mathbb{R}^*$ pentru care inecuaţia $ax^2+2(a+1)x+2a-1\geq 0$ nu are soluţii în mulţimea numerelor reale.

(5 p) 3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=\frac{11}{6}$.

(5 p) 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o cifră x, aceasta să verifice inegalitatea $(x+1)!-x!\leq 100$.

(5 p) 5. Să se determine ecuaţia înălţimii din A a triunghiului cu vârfurile $A(2,1),B(2,2),C(1,1)$.

(5 p) 6. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $AB=7\sqrt{2}$ şi $m(\hat{C})=135^\circ$.

Subiectul II (30 puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+13y-5z=0, \text{unde } x,y,z\in\mathbb{R}. \\ x-11y+3z=0 \end{cases}$$

(5 p) a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A, A fiind matricea sistemului.
(5 p) b) Să se rezolve sistemul de ecuaţii.
(5 p) c) Să se găsească o soluţie (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care

$$(x_0+3)^2+(y_0+4)^2-(z_0+1)^2+y_0=x_0{}^2+y_0{}^2-z_0{}^2+39$$

2.Se consideră $a\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=3X^4-2X^3+X^2+aX-1\in\mathbb{R}[X]$.

(5 p) a) Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$, unde $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f.

(5 p) b) Să se determine restul împărţirii polinomului f la $(X-1)^2$.

(5 p) c) Să se demonstreze că f nu are toate rădăcinile reale.

Simularea examenului de bacalaureat la matematică – M1
29.04.2013

Subiectul III (30 puncte)

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x\cdot\text{arctg}\,x-\ln(1+x^2)$.

(5 p) **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

(5 p) **b)** Să se arate că funcţia f' este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(5 p) **c)** Să se demonstreze că $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}_+^*$.

2.Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

(5 p) **a)** Să se calculeze I_2.

(5 p) **b)** Să se verifice că $I_{n+2}+I_n=\frac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

(5 p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

Notă: Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.

Colegiul National
Vasile Alecsandri
Str Nicolae Balcescu 41, Galati 6200, Romania, Tel:+40236411688, Fax:+40236460135, email:cva@cva-galati.ro

Simularea examenului de bacalaureat la matematică – M1
29.04.2013
Barem de corectare şi notare

Subiectul I (30 puncte)

1. Determinarea sumei $1+3+3^2+...+3^{2012}=\dfrac{3^{2013}-1}{3-1}$ 3p
   Finalizare..........2p
2. Impunerea condiţiilor $\Delta<0,\ a<0$ 2p
   $\Delta=4\left(-a^2+3a+1\right)$ 1p
   Rezolvarea inecuaţiei $\Delta<0$ şi finalizarea $a\in\left(-\infty,\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\right)$ 2p
3. Impunerea condiţiei de existenţă $x>0$ 1p
   Obţinerea ecuaţiei $\log_2 x+\dfrac{1}{2}\log_2 x+\dfrac{1}{3}\log_2 x=\dfrac{11}{6}$ 2p
   Finalizare $x=2$ 2p
4. $x!\cdot x\le 100$ 1p
   Inegalitatea este verificată pentru $x\in\{0,1,2,3,4\}$ 2p
   Finalizare: $P=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$ 2p
5. Determinarea ecuaţiei dreptei BC : $y=x$ 2p
   Ecuaţia înălţimii din A a triunghiului ABC: $x+y-3=0$ 3p
6. $\dfrac{AB}{\sin C}=2R$ 2p
   Finalizare: $R=7$ 3p

Subiectul II (30 puncte)

1.a) $\det A=0\Rightarrow rang A<3$ 2p
   Găsirea unui minor de ordin 2 nenul..........2p
   Finalizare: rang A=2..........1p
 b) Alegem x, y necunoscute principale, iar $z=\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$ necunoscută secundară
 $\begin{cases} x+y=\lambda \\ x+13y=5\lambda \end{cases}$ 3p

Finalizare: $S=\left\{\left(\frac{2\lambda}{3},\frac{\lambda}{3},\lambda\right),\lambda\in\mathbb{R}\right\}$ 2p

c) Obţinerea ecuaţiei $6x_0+9y_0-2z_0=15$ 1p

Înlocuim $x_0=\frac{2\lambda}{3}, y_0=\frac{\lambda}{3}, z_0=\lambda$ 2p

Finalizare: $\lambda=3$ şi soluţia cerută este $(2,1,3)$ 2p

2.a) Scrierea relaţiilor lui Viete......2p

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{-\frac{a}{3}}{-\frac{1}{3}}=a$ 3p

b) Aplicarea teoremei împărţirii cu rest, obţinerea restului $r=mX+n,\ m,n\in\mathbb{R}$ şi

$f(x)=(x-1)^2q(x)+mx+n,\ x\in\mathbb{R}$ 2p

Derivând avem $f'(x)=2(x-1)q(x)+(x-1)^2q'(x)+m,\ x\in\mathbb{R}$ 1p

Pentru $x=1$ avem $m+n=1+a, m=8+a$ 1p

Finalizare: $r=(a+8)X-7$ 1p

c) Relaţiile lui Viete......2p

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+...+x_3x_4)=\frac{4}{9}-\frac{2}{3}<0$ 3p

<u>Subiectul III (30 puncte)</u>

1.a) $f'(x)=arctgx+\frac{x}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}$ 3p

$f'(x)=arctgx-\frac{x}{1+x^2}, \forall x\in\mathbb{R}$ 2p

b) $f''(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ 3p

Finalizare 2p

c) f' strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ şi $f'(0)=0\Rightarrow f'(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}_+^*$ 2p

f strict crescătoare pe $\mathbb{R}_+^*$ 1p

$f(0)=0$ 1p

Finalizare 1p

2.a) $I_2=\int_0^1\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$ 2p

$I_2=x\Big|_0^1-arctgx\Big|_0^1=1-\frac{\pi}{4}$ 3p

b) $I_{n+2}+I_n=\int_0^1\frac{x^n\left(x^2+1\right)}{x^2+1}dx$ 2p

$I_{n+2}+I_n=\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{1}{n+1}$ 3p

c) Stabilirea monotoniei şirului $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 1p

Deducerea inegalităţii $\frac{1}{2(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{2(n-1)}, n\ge 2$ 2p

Finalizare: $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n=\frac{1}{2}$ 2p