Concursul Național de Matematică "Arhimede"
Ediția a X-a, Etapa a III-a, 27 aprilie 2013

Clasa a V-a

I. *(4p)* **a)** Să se simplifice fracția $\dfrac{2^4+3^2}{3^4+2^2}$

(5p) **b)** Să se demonstreze că există o infinitate de perechi (m, n) cu $m \neq n$ pentru care fracția $\dfrac{2^m+3^n}{3^m+2^n}$ este reductibilă.

II. *(4p)* **a)** Găsiți numerele $\overline{abc}$ care au proprietatea că $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$

(5p) **b)** Numerele x,y,z împărțite la 13 dau resturile 5,7, respectiv 11.

Determinați cel mai mic număr natural n pentru care $13/(5x+7y+nz)$.

prof. Vochița și Vasile Tarciniu, Odobești – Vrancea

III. *(4p)* **a)** Demonstrați că $15^{16} > 16^{15}$.

(5p) **b)** Să se afle câte pătrate perfecte sunt cuprinse între 16^{15} și 15^{16}.

prof. Traian Preda

IV. *(9p)* Avem 9 bile dintre care 8 au aceeași greutate iar a noua diferă în greutate de celelalte 8. Având la dispoziție o balanță să se determine din 3 cântăriri bila de greutate diferită.

prof. Traian Preda

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.
Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă și completă, indiferent de metodă. Timp de lucru: **2ore 30 min**.

Concursul Național de Matematică "Arhimede"
Ediția a X-a, Etapa a III-a, 27 aprilie 2013

Clasa a VI-a

I. Numerele a, b, c, d, e, f sunt direct proporționale cu 2, 3, 5, 7, 11, 13.

(4p) **a)** Știind că $3a+2c=48$, determinați media aritmetică a celor șase numere.

(5p) **b)** Dacă $a+b+c=d+e+f-84$, aflați cel mai mare dintre numerele date.

II. *(4p)* **a)** Să se afle cea mai mică valoare pe care poate să o aibă suma a trei numere prime distincte a, b, c știind că numerele $\dfrac{a+b}{2}$ și $\dfrac{b+c}{2}$ sunt numere prime.

(5p) **b)** Fie a, b, c trei numere prime impare, distincte. Demonstrați că produsul $abc\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\left(\dfrac{a+c}{2}\right)\left(\dfrac{b+c}{2}\right)$ nu poate fi pătrat perfect.

prof. Traian Preda

III. Se consideră ΔABC și punctul $D\in(BC)$ astfel încât $AB+BD=AC+CD$.

Să se demonstreze că triunghiul ABC este isoscel în fiecare din situațiile:

(3p) **a)** AD mediană

(3p) **b)** AD bisectoare

(3p) **c)** AD înălțime

prof. Traian Preda

IV. *(4p)* **a)** Să se arate că există o infinitate de perechi de numere naturale nenule (a,b) astfel încât numărul $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a}$ să fie natural

prof. Gheorghe Stoica, Petroșani

(5p) **b)** Fie $n\in N$, $n\geq 3$. Dacă $(n-1)^x=n$, $n^y=n+1$ și $(n+1)^z=n+2$, comparați numerele x, y și z.

prof. Gheorghe Stoica, Petroșani

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.
Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă și completă, indiferent de metodă. Timp de lucru: **2ore 30 min.**

Concursul Național de Matematică "Arhimede"
Ediția a X-a, Etapa a III-a, 27 aprilie 2013

Clasa a VII-a

I. *(3p)* **a)** Să se arate că $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}$.

(6p) **b)** Arătați că:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2011\cdot 2013}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2012\cdot 2013}=\frac{1}{2}$$

prof. Vochița și Vasile Tarciniu, Odobești – Vrancea

II. Fie $a,b,c\in R^*$. Să se arate că:

(4p) **a)** $(a+b+c)\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)-9=\dfrac{(a-b)^2}{ab}+\dfrac{(b-c)^2}{bc}+\dfrac{(c-a)^2}{ca}$

(5p) **b)** Să se arate că numerele $1,2,\ldots,2011$ au împreună un număr par de divizori naturali.

prof. Gheorghe Stoica, Petroșani

III. Se consideră trapezul $ABCD(AB\parallel CD)$ și punctele $M\in(AD)$, $N\in(BC)$ astfel încât $MN\parallel AB$ și $O\in MN$, unde $AC\cap BD=\{O\}$

Notăm $AO\cap BM=\{P\}$, $AN\cap BO=\{Q\}$, $ND\cap OC=\{R\}$ și $MC\cap OD=\{S\}$. Demonstrați că:

(2p) **a)** $SR\parallel PQ$

(2p) **b)** Dreptele PS, QR, AD, BC sunt concurente.

(2p) **c)** $MU\equiv UV\equiv VN$, unde $SP\cap MO=\{U\}$, $RQ\cap ON=\{V\}$

(3p) **d)** $\dfrac{1}{PQ}+\dfrac{1}{SR}=\dfrac{6}{MN}$.

prof. Traian Preda

IV. *(9p)* Se consideră triunghiul ABC în care $m(\hat{A})=60^\circ$.

Să se arate că $\left(\dfrac{AB}{BC+CA}\right)^2+\left(\dfrac{AC}{CB+BA}\right)^2\geq\dfrac{1}{2}$. Când are loc egalitatea?

prof. Gheorghe Stoica, Petroșani

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.
Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă și completă, indiferent de metodă. Timp de lucru: **3 ore.**

Concursul Național de Matematică "Arhimede"
Ediția a X-a, Etapa a III-a, 27 aprilie 2013

Clasa a VIII-a

I. *(3p)* **a)** Să se arate că $2\cdot\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)=\frac{6}{4!}$.

(6p) **b)** Aflați valoarea numărului natural nenul n pentru care:

$$\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+...+\frac{2n}{(n+1)!}=2!-\frac{2}{2014!}$$

unde $n!=1\cdot 2\cdot ...\cdot n$, $n\in N^*$.

prof. Vochița și Vasile Tarciniu, Odobești – Vrancea

II. *(2p)* **a)** Fie $a,b\in(0,\infty)$. Demonstrați că $\frac{ab}{a^2+b^2}\leq\frac{1}{2}$.

(7p) **b)** Fie $a,b,c\in(0,\infty)$ și numerele $x=\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}$ și

$y=\frac{b^3}{a^2+b^2}+\frac{c^3}{b^2+c^2}+\frac{a^3}{c^2+a^2}$. Arătați că $|x-y|\leq\frac{|a-b|+|b-c|+|c-a|}{2}$.

prof. Gheorghe Stoica, Petroșani

III. Triunghiul echilateral ABC $(AB=6cm)$ și triunghiul isoscel $DBC(DB=DC=3\sqrt{3}cm)$ sunt situate în plane diferite. Știind că AD = 3 cm și E este mijlocul lui [BC]:

(3p) **a)** arătați că AD este perpendiculară pe DE;

(3p) **b)** determinați măsura unghiului format de dreptele AD și BC;

(3p) **c)** dacă DF este mediana în triunghiul ADC, calculați aria secțiunii determinate de planul (DEF) în tetraedrul $ABCD$.

prof. C. Godeanu

IV. Fie $ABCD$ un tetraedru cu toate fețele triunghiuri ascuțitunghice. Notăm cu I_A, I_B, I_C, I_D centrele cercurilor înscrise în $\Delta BCD, \Delta ACD, \Delta ABD$, respectiv ΔABC.

Știind că $BI_B\perp(ACD)$, $CI_C\perp(ABD)$ și $DI_D\perp(ABC)$, demonstrați că:

(4p) **a)** $AI_A\perp(BCD)$

(5p) **b)** tetraedrul $ABCD$ este tetraedru regulat.

prof. Traian Preda

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.
Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă și completă, indiferent de metodă. Timp de lucru: **3 ore.**