The Mathematics Contest
„THE CLOCK – TOWER SCHOOL"
15th Edition
CLASA a V-a

1. Un număr natural *n* dă restul 5 la împărţirea cu 9 şi restul 8 la împărţirea cu 12.

a) Arătaţi că 2012 satisface condiţiile din enunţ şi aflaţi cel mai mic număr natural care îndeplineşte aceste condiţii;

b) Ce resturi obţinem când împărţim numerele $3n$ şi $4n$ la 36?

c) Ce rest se obţine prin împărţirea lui n la 36?

Ina DICU, Cornel MOROTI – Rm. Vâlcea

2. Fie a şi b două numere naturale care verifică egalitatea $3ab - a = 2b + 11$.

a) Demonstraţi că numărul b este par;

b) Dacă $ab = 6$, determinaţi valoarea lui a;

c) Aflaţi numerele a şi b.

Dumitru DOBRE – Rm. Vâlcea

3. Fie $A = \{1; 2; 3; ...; 12\}$.

a) Determinaţi numărul natural *n,* ştiind că $231n^2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 12$;

b) Arătaţi că există două mulţimi *B* şi *C*, astfel încât $B \cup C = A, B \cap C = \varnothing$ şi suma elementelor din mulţimea *B* este egală cu suma elementelor din mulţimea *C*;

c) Fie $\overline{CEAS}$ produsul numerelor pare, nedivizibile cu 5 din mulţimea *A*. Numărul $\overline{CEAS}$ se poate transforma succesiv prin următoarele operaţii:

O_1: Mărim două cifre vecine cu 1, cu condiţia ca ambele cifre să fie diferite de 9;

O_2: Micşorăm două cifre vecine cu 1, cu condiţia ca ambele cifre să fie diferite de 0;

O_3: Numărului nou obţinut i se aplică operaţia O_1 sau O_2.

Stabiliţi dacă după mai multe operaţii succesive se poate obţine numărul 2012. Justificaţi!

Ştefan SMĂRĂNDOIU – Rm. Vâlcea

4. Pe o tablă sunt scrise 2011 cifre de 1, 2012 cifre de 2 şi 2013 cifre de 3. La un pas ştergem două cifre diferite şi scriem în locul lor cifra care este diferită de cele şterse.

a) După câţi paşi este posibil ca pe tablă să rămână scrisă o singură cifră?

b) Dacă după aceşti paşi pe tablă rămâne o singură cifră, care este această cifră?

Constantin BĂRĂSCU – Rm. Vâlcea

Barem

1. $\begin{matrix} 2012 = 9 \cdot 223 + 5, \\ 2012 = 12 \cdot 167 + 8 \end{matrix}$, deci satisface condiţiile din enunţ......................1p

Din t.î.r avem: $n = 9c + 5, n = 12q + 8 \Rightarrow n + 4 = 9(c+1)$ şi $n + 4 = 12(q+1)$..........1p

$n \in N$ şi cel mai mic, deci $n + 4 = 36 \Rightarrow n = 32$ 1p

$3n = 3(12q + 8) = 36q + 24$

$r_1 < 36 \Rightarrow r_1 = 24 \quad 4n = 4(9c + 5) = 36c + 20$ 1p

$r_2 < 36 \Rightarrow r_2 = 20$ 1p

$n = 4n - 3n = 36c + 20 - 36q - 24 = 36(c-1) - 36q + 36 + 20 - 24 = 36(c - 1 - q) + 32$

Deci restul este 32..2p

2. a) Dacă a ar fi par atunci $2b$+11 ar fi par (fals) $\Rightarrow$ a impar.............................. 1p

$a(3b-1) = 2b + 11$ impar $\Rightarrow$ b par 1p

b) Inlocuind $ab = 6$ în egalitatea dată obţinem a+2b = 7 .... 1p

Cum b este par $\Rightarrow b \in \{2, 6\}$

Pentru b=6 $\Rightarrow$ a=1, valori ce nu verifica egalitatea din ipoteza

Pentru b=2 $\Rightarrow$ a=3 (convine).. 1p

c) $3ab - a = 2b + 11 \Leftrightarrow 9ab - 3a = 6b + 33 \Leftrightarrow 3a(3b-1) = 2(3b-1) + 35 \Leftrightarrow$

$(3a-2)(3b-1) = 35$ 1p

Avem:

$\begin{cases} 3a - 2 = 1 \\ 3b - 1 = 35 \end{cases} \Rightarrow a = 1, \ b = 12$ 0,5p

$\begin{cases} 3a - 2 = 5 \\ 3b - 1 = 7 \end{cases} \Rightarrow a \notin \mathbf{N}$ 0,5p

$\begin{cases} 3a - 2 = 7 \\ 3b - 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow a = 3, \ b = 2$ 0,5p

$\begin{cases} 3a - 2 = 35 \\ 3b - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow a \notin \mathbf{N}$ 0,5p

3. a) $n^2 = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^2$ .... 1 p

$n = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 = 1440$ .... 1 p

b) $S_A = 1 + 2 + 3 + ... + 12 = 78 \Rightarrow S_B = S_C = 39$ .... 1 p

De exemplu, $B = \{12; 11; 10; 6\}$ şi $C = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9\}$ 1p

c) $\overline{CEAS} = 4608$ .... 1 p

Varianta I

Suma cifrelor numărului $\overline{CEAS} = 4608$ este număr par. Prin mărirea sau micşorarea cu 1 a două cifre numărul obţinut după orice transformare are suma cifrelor pară............. 1p

Suma cifrelor lui 2012 este 5, număr impar. Deci nu este posibil. .... 1 p

Varianta a II-a

$(E + S) - (A + C) = 10$

Descăzutul, $E + S$ şi scăzătorul, $A + C$ se măresc sau se micşorează simultan cu o unitate, astfel că diferenţa rămâne egală cu 10, după orice operaţie. .... 1 p

În cazul numărului 2012, diferenţa $(E + S) - (A + C) = 1$. Deci nu este posibil. ..... 1 p

Observaţie: Se poate soluţiona cerinţa de la c) aplicând criteriul de divizibilitate cu 11.

4.

La un pas, numărul de cifre scrise pe tablă scade cu 1, deci după 2011+2012+2013-1 = 6035 pași.

La un pas, numerele 2011 (impar), 2012 (par), 2013 (impar) își schimbă paritatea (devin par, impar, par), deoarece ele cresc sau descresc cu 1.

În final, când rămâne un singur număr scris, unul dintre cele trei numere este 1, iar celelalte devin 0, adică cifrele 1 și 3 sunt în număr de 0, iar cifra 2 una. Deci ultima cifră va fi 2.

The Mathematics Contest
„THE CLOCK – TOWER SCHOOL”
15th Edition
CLASA a VI-a

1. Dacă x persoane muncesc fiecare câte x ore pe zi, timp de x zile reuşesc să producă x articole. Dacă y oameni muncesc fiecare câte y ore pe zi, timp de y zile, aceştia reuşesc să producă 1 articol. Se cunoaşte că $x > 1$.

a) Argumentaţi de ce x nu poate fi nici 30 şi nici 4,5;

b) Determinaţi valoarea lui y;

c) Dacă pentru o oră de lucru o persoană primeşte suma de 20 lei, câţi lei încasează aceasta dacă produce singură un articol ?

Dumitru DOBRE – Rm. Vâlcea

2. Fie A,O,D puncte coliniare în această ordine. În unul din semiplanele determinate de dreapta AD considerăm semidreptele $[OB$ şi $[OC$, astfel încât $[OC \subset Int(\sphericalangle AOB)$.

Se ştie că $\dfrac{m(\sphericalangle AOB)}{m(\sphericalangle BOC)} = \dfrac{a}{b}$ şi $\dfrac{m(\sphericalangle BOC)}{m(\sphericalangle COD)} = \dfrac{b}{c}$

a) Exprimaţi în funcţie de *a,b* şi *c*, raportul $\dfrac{m(\sphericalangle AOC)}{m(\sphericalangle BOD)}$;

b) Dacă *a*,*b*,*c* sunt numere naturale prime ce verifică relaţia $15a + 7b + 3c = 117$, iar $[OX$ şi $[OY$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$, respectiv $\sphericalangle COD$, aflaţi $m(\sphericalangle XOY)$.

Leon GENOIU, Marius GIURGIU – Rm. Vâlcea

3. *a)* Demonstraţi că restul împărţirii unui număr natural nenul la 9 este egal cu restul împărţirii sumei cifrelor numărului respectiv la 9.

b) Fie numărul $a = 2012^{2012}$. Calculăm suma cifrelor numărului *a*, apoi calculăm suma cifrelor sumei obţinute şi aşa mai departe până obţinem o singură cifră. Care este această cifră?

Constantin BĂRĂSCU – Rm. Vâlcea

4. Triunghiul ABC este isoscel de bază $[BC]$ cu $m(\sphericalangle A) > 90^o$. Fie FD şi GE mediatoarele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$ cu $D \in (AB)$ şi $E \in (AC)$, F şi G$\in BC$, iar $DF \cap GE = \{H\}$. Fie T mijlocul laturii $[BC]$. Arătaţi că:

a) ΔHDE este isoscel;

b) $HT \perp BC$;

c) HT este mediatoarea segmentului $[DE]$.

Ştefan SMĂRĂNDOIU – Rm. Vâlcea

BAREM

1. Cum x reprezintă numărul de ore lucrate pe zi, avem $x < 25$ 1p
Cum x reprezintă numărul de persoane, avem $x \in \mathbf{N} \Rightarrow x \neq 4,5$ 1p
x pers .... x h/zi ………… x zile ……………. x articole
1 pers .... 1 h/zi ………… 1 zi… ……………. $\frac{1}{x^2}$ articole ……………..… 1p
y pers .... y h/zi ………… y zile …………… $\frac{y^3}{x^2}$ articole ………………… 1p
Avem $y^3 = x^2$, cu $1 < y \leq 24$ avem y = 4 ……………………………………………… 1p
Avem x = 8 şi numărul de ore necesar producerii unui articol de către o singură persoană este 64 ………………………………………………………………… 1p
Suma încasată este de $64 \cdot 20 = 1280$ lei ……………………………………………… 1p

2. a) Din $\frac{m(\angle AOB)}{m(\angle BOC)} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{m(AOC)}{m(\angle BOC)} = \frac{a-b}{b}(I)$ 0,5p

$Din \frac{m(\angle BOC)}{m(\angle COD)} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{m(BOC)}{m(\angle BOD)} = \frac{b}{c-b}(II)$ 0,5p

Din relaţiile (I) şi (II) deducem că $\frac{m(\angle AOC)}{m(\angle BOD} = \frac{a-b}{c-b}$...1$p$

b)Arată că 7b$\vdots$3$\Rightarrow$b=3...1p
Găseşte: a=3, b=3, c=17 şi a=5, b=3, c=7,...1,5p
Cum m($\angle AOB$) > m($\angle$ BOC)$\Rightarrow$a > b$\Rightarrow$(a,b,c)=(5,3,7)…………………………………….0,5p

Deci, $\frac{m(\angle AOB)}{5} = \frac{m(\angle BOC)}{3} = \frac{m(\angle COD)}{7} = k$, k>0……………………… ………….0,5p

Află k= 20^0 ....1p
$m(\angle XOY) = 60^0$ 0,5p

3. Dacă $x = \overline{abcd} = d + 10c + 100b + 1000a = (a+b+c+d) + 9c + 99b + 999a =$
$= (a+b+c+d) + \mathrm{M}_9 \Rightarrow \overline{abcd} - (a+b+c+d) = \mathrm{M}_9 \Rightarrow q.e.d.$
Invariantul este restul împărţirii numărului a la 9, pentru că el este acelaşi pentru a şi pentru suma cifrelor, adică când suma rămâne o sinură cifră, ea are acelaşi rest la impărţirea cu 9 ca numărul iniţial a.
Dar $a = 2012^{2012} = (M_9+5)^{2012} = M_9 + 5^{2012} = M_9 + \left(5^4\right)^{503} = M_9 + (M_9+4)^{503} = M_9 + M_9 + 4^{503} =$
$= M_9 + 4^{501} \cdot 4^2 = M_9 + \left(4^3\right)^{167} \cdot 16 = M_9 + 64^{167} \cdot 16 = M_9 + (M_9+1)^{167} \cdot 16 = M_9 + (M_9+1) \cdot 16 = M_9 + 7$ Deci ultima cifră este 7.

4.
a) $[AD] \equiv [AE]$... ……………………………………………………………... 1 p
$\Delta DAH \equiv \Delta EAH\,(I.C.)$ ……………………………………….…………… 1 p
$[HD] \equiv [HE] \Rightarrow \Delta HDE$ este isoscel de bază $[DE]$ ………………………….. 1 p
b) FD şi GE sunt mediatoare în ΔABC, iar $FD \cap GE = \{H\} \Rightarrow H$ este centul cercului circumscris $\Delta - lui\ ABC$ .. 1 p
H este centul cercului circumscris $\Delta - lui\ ABC$ şi T este mijlocul laturii
$[BC] \Rightarrow HT$ este mediatoare în $\Delta ABC \Rightarrow HT \perp BC$ ……………………………… 1 p
c) $\Delta HDT \equiv \Delta HET\,(L.U.L.)$ ……………………..……………….………… 1 p

$$\left.\begin{array}{l} HD = HE \Rightarrow d(H;D) = d(H;E) \\ TD = TE \Rightarrow d(T;D) = d(T;E) \end{array}\right\} \Rightarrow HT \text{ este mediatoarea segmentului } [DE] \Rightarrow HT \perp DE \text{ .... 1 p}$$

Observaţie: Pentru cei ce au studiat proprietăţile $\Delta - lui$ isoscel există şi alte soluţii ce se punctează corespunzător!

The Mathematics Contest
„THE CLOCK – TOWER SCHOOL"
15^{th} Edition
CLASA a VII-a

1. *a)* Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $x(x+5)=84$.

b) Avem un pătrat care este împărţit în 5 patrulatere cu interioarele disjuncte: 4 dreptunghiuri având aceleaşi dimensiuni şi un pătrat mic. Dacă se ştie că aria pătratului mic este egală cu 25, iar aria fiecărui dreptunghi este egală cu 84, aflaţi perimetrul pătratului iniţial şi realizaţi un desen care să arate modul de împărţire a pătratului iniţial.

Marcel TELEUCĂ – Chişinău

2. Fie triunghiul ABC cu $AD \perp BC, D \in (BC)$ şi propoziţiile:

P_1: AB = AC P_2: AB – BD = AC – CD P_3: AB + BD = AC + CD

Demonstraţi că:

a) $P_1 \Rightarrow P_2$;   *b)* $P_2 \Rightarrow P_3$;   *c)* $P_3 \Rightarrow P_1$;

Constantin BĂRĂSCU – Rm. Vâlcea

3. Fie şirul de numere $n, n+1, n+2, ..., n^2$, unde *n* este număr natural nenul.

a) Pentru $n=5$ daţi exemplu de patru numere *a*, *b*, *c*, *d* din şir astfel încât $ab=cd$;

b) Ştiind că pentru $n \geq 6$ există patru numere *a*, *b*, *c*, *d* din şir astfel încât $ab=cd$, daţi un exemplu de astfel de numere.

c) Pentru ce valori ale lui *n* există patru numere *a*, *b*, *c*, *d* din şir, astfel încât $ab=cd$?

Marcel TELEUCĂ – Chişinău

4. Se consideră un triunghi ABC şi $EF \parallel BC, E \in (AB), F \in (AC)$ şi punctul $M \in (EF)$ oarecare. Se ştie că $BM \cap AC = \{B'\}$ şi $CM \cap AB = \{C'\}$.

a) Să se arate că $AE \cdot BC = AB \cdot EF$;

b) Demonstraţi că $S_{\Delta AB'C'} = 3S_{\Delta MB'C'} \Leftrightarrow G \in (EF)$, unde *G* este centrul de greutate al triunghiului ABC. Prin $S_{\Delta XYZ}$ se înţelege aria triunghiului XYZ.

Constantin BĂRĂSCU – Rm. Vâlcea

BAREM

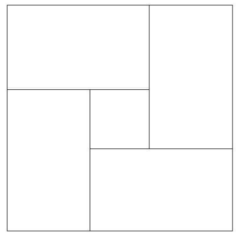
1.

$x(x+5)=84 \Rightarrow x^2+12x-7x-84=0 \Rightarrow x(x+12)-7(x+12)=0 \Rightarrow (x+12)(x-7)=0$

Deci $x \in \{7;-12\}$

Aria totală va fi $84 \cdot 4+25=361=l^2 \Rightarrow l=19 \Rightarrow P=19 \cdot 4=76$

Împărţirea va fi următoarea:



2.

AB = AC şi $AD \perp BC \Rightarrow BD=CD \Rightarrow AB-BD=AC-CD$

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile ADB şi ADC obţinem:

$AD^2=AB^2-BD^2=AC^2-CD^2=(AB+BD)(AB-BD)=(AC-CD)(AC+CD)$

Conform a) $AB-BD=AC-CD>0$ Deci $AB+BD=AC+CD$

Construim segmentele $[BE] \equiv [CF]$ pe dreapta BC (ordinea punctelor este E, B, D, C, F.)

Cum $AB+BD=AC+CD \Rightarrow DE=DF \Rightarrow$ dreapta AD este mediatoarea segmentului $[EF]$

Deci $AE=AF \Rightarrow m(\sphericalangle E)=m(\sphericalangle F)=\alpha \Rightarrow m(\sphericalangle ABC)=m(\sphericalangle ACB)=2\alpha$ (unghi exterior)

Deci AB=AC.

3.

De exemplu $a=6, b=10, c=12, d=5$.

De exemplu $a=n, b=6n, c=2n, d=3n$. Cum $n \geq 6 \Rightarrow n^2 \geq 6n$, deci numărul *6n* aparține șirului

Conform b) există soluție pentru $n \geq 6$. Rămân de verificat cazurile *n≤5:* pentru n=5 avem 5,...,25 și numere pot fi alese luînd produsul $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ și despărțindu-l în perechi $2 \cdot 3=6$ și $4 \cdot 5=20$, și $2 \cdot 4=8$ și $3 \cdot 5=15$, deci numerele pot fi a=6, b=20; c=8, d=15. Pentru n=4 avem perechile a=6, b=10; c=4, d=15. Pentru n=3 avem a=3, b=8, c=4, d=6. Pentru cazurile n=1 și n=2 nu există soluții. Deci, pentru orice n≥3 condiția problemei va fi îndeplinită.

4.

Cum EF şi BC sunt drepte paralele, conform teoremei fundamentale a asemănării avem

$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC} \Rightarrow AE \cdot BC=AB \cdot EF$.

$$\frac{S_{\Delta AB'C'}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{AC' \cdot AB'}{AB \cdot AC} \quad (1)$$

$$\frac{S_{\Delta MB'C'}}{S_{\Delta MBC}}=\frac{MC' \cdot MB'}{MB \cdot MC} \quad (2)$$

Conform teoremei lui Menelaus în $\Delta MB'C$ cu transversal A, C', B avem că

$$\frac{AB'}{AC} \cdot \frac{CC'}{C'M} \cdot \frac{BM}{BB'}=1 \quad (3)$$

Conform teoremei lui Menelaus în $\Delta MC'B$ cu transversal A, B', C avem că

$$\frac{AC'}{AB} \cdot \frac{BB'}{B'M} \cdot \frac{CM}{CC'}=1 \quad (4)$$

Deci $\frac{S_{\Delta AB'C'}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{AC' \cdot AB'}{AB \cdot AC}=\frac{B'M \cdot CC'}{BB' \cdot CM} \cdot \frac{C'M \cdot BB'}{CC' \cdot BM}=\frac{B'M \cdot C'M}{CM \cdot BM}=\frac{S_{\Delta MB'C'}}{S_{\Delta MBC}}$

Deci $\frac{S_{\Delta AB'C'}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{S_{\Delta MB'C'}}{S_{\Delta MBC}} \quad (5)$

"$\Rightarrow$" Dacă $S_{\Delta AB'C'}=3S_{\Delta MB'C'} \Rightarrow \frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{d(M,BC)}{d(A,BC)}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{FC}{AC}=\frac{1}{3} \Rightarrow G \in [EF]$

"$\Leftarrow$" Dacă $G \in [EF] \Rightarrow \frac{d(M,BC)}{d(A,BC)}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{1}{3} \Rightarrow S_{\Delta AB'C'}=3S_{\Delta MB'C'}$

The Mathematics Contest
„THE CLOCK – TOWER SCHOOL"
15th Edition
CLASA a VIII-a

1. Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia: $x(x+4)(x+8)(x+12)=3465$

Alexandru UNGUREANU – Rm. Vâlcea

2. *a)* Dacă $a,b,c\in\mathbb{R}$, demonstraţi inegalitatea $a+b+c\leq\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$;

b) Fiind date numerele $a,b,c,x,y,z\in\mathbb{R}$ astfel încât $a^2+b^2+c^2=x^2+y^2+z^2=p$, să se demonstreze inegalitatea $ax+by+cz\leq p$.

c) Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$, astfel încât $a^2+b^2+c^2=1$. Arătaţi că există $x,y,z\in\mathbb{Z}$, nu toate nule, cu modulele strict mai mici decât 3, astfel încât $\left|xa+yb+zc\right|\leq\frac{\sqrt{3}}{13}$.

Prelucrat de Vasile GORGOTĂ – Rm. Vâlcea

3. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB=12\,cm$. Pe muchiile $[AA']$, respectiv, $[CC']$ se iau punctele E, respectiv, F, astfel încât $[D'E]\equiv[D'F]$.

a) Dacă $D'E=12\sqrt{2}\,cm$, să se afle distanţa de la D' la EF.

b) Dacă $D'E=4\sqrt{13}\,cm$, să se afle forma şi perimetrul secţiunii determinate de planul $(D'EF)$.

Ştefan SMĂRĂNDOIU – Rm. Vâlcea

4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă unde *ABCD* este patrulater convex. Dacă $AC\cap BD=\{O\}$, punctul $I\in(OD')$, $CI\cap(ADD')=\{M\}$, $AI\cap(CDD')=\{N\}$, $J\in(OC')$, $BJ\cap(CDD')=\{E\}$, $DJ\cap(BCC')=\{F\}$, demonstraţi că:

a) $A'D'\parallel(DOC)$;

b) Dreptele *MN* şi *EF* sunt paralele cu planul $(A'B'C')\Leftrightarrow ABCDA'B'C'D'$ e paralelipiped.

Constantin BĂRĂSCU – Rm. Vâlcea

BAREM

1. $x(x+4)(x+8)(x+12)=(x^2+12x)(x^2+12x+32)=(x^2+12x+16-16)(x^2+12x+16+16)=$

$=\left(x^2+12x+16\right)^2-16^2=3465\Rightarrow\left(x^2+12x+16\right)^2=3721=61^2\Rightarrow\left(x^2+12x+16\right)=61$ sau $\left(-x^2-12x-16\right)=61$

CAZUL I: $\left(x^2+12x+16\right)=61\quad\Rightarrow x^2+12x-45=0\Leftrightarrow(x-3)(x+15)=0\Rightarrow x\in\{-15;3\}$

CAZUL II: $\left(-x^2-12x-16\right)=61\Leftrightarrow x^2+12x+77=0\Leftrightarrow x^2+12x+36+41=0\Leftrightarrow\left(x+6\right)^2+41=0\qquad(1)$

$\forall x\Rightarrow\left(x+6\right)^2\geq 0\Rightarrow\left(x+6\right)^2+41\geq 41\qquad(2)$

Din (1) şi (2) rezultă contradicţie, deci singurele soluţii ale ecuaţiei sunt $x=3$ şi $x=-15$.

2. Ridicăm la pătrat, reducem termenii asemenea şi obţinem: $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$...........1*punct*

Inmulţind cu 2 şi formând pătrate perfecte, obţinem $\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2\geq 0$

cu egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c$ ....2 puncte.

Considerăm $\left(a-x\right)^2+\left(b-y\right)^2+\left(c-z\right)^2\geq 0$ 1punct

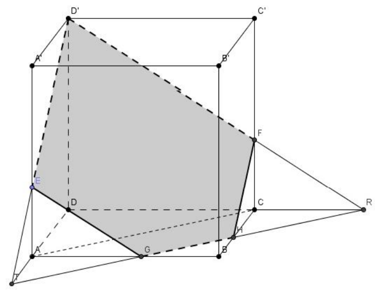
de unde prin ridicare la pătrat şi folosind ipoteza rezultă ceea ce trebuia demonstrat..1punct

c)Considerând sumele $S=ma+nb+pc$ cu $m,n,p\in\{0,1,2\}$ în număr de 27 avem $|ma+nb+pc|\leq 2\left(|a|+|b|+|c|\right)\leq 2\sqrt{3}$

Deci $|S|\in\left[0,2\sqrt{3}\right]$pe care-l împărţim în 26 de intervale de lungimi $\frac{2\sqrt{3}}{26}=\frac{\sqrt{3}}{13}$.Cum avem 26 de intervale şi 27 de sume vor exista două sume ce aparţin aceluiaşi interval,deci diferenţa lor, în modul, este mai mică decât lungimea intervalului. $|m_1a+n_1b+p_1c-m_2a-n_2b-p_2c|\leq\frac{\sqrt{3}}{13}$

Notând $x=m_1-m_2,\ y=n_1-n_2,\ z=p_1-p_2$ obţinem ceea ce se cerea demonstrat.

3. E coincide cu A şi F coincide cu C .... (1p)



$\Delta D'EC$ e echilateral de latură $12\sqrt{2}cm$ .... (1p)

$d(D',EF)=d(D',AC)=\frac{12\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}cm=6\sqrt{6}cm$ .... (1p)

Secţiunea este pentagonul $D'EGHF$ .... (2p)

Unde $D'E\cap AD=\{T\},D'F\cap DC=\{R\},TR\cap BC=\{H\},TR\cap AB=\{G\}$

$EG=FH=2\sqrt{13}cm$ .... (1p) $P_{D'EGHF}=12\sqrt{13}+6\sqrt{2}cm$ ...... (1p)

4. $A'D'\parallel AD, AD\subset(DOC), A'D'\not\subset(DOC)\Rightarrow A'D'\parallel(DOC)$

$"\Rightarrow"$

$M\in(AD')$ şi $N\in(CD')$. Dacă $MN\parallel(A'B'C')\Rightarrow MN\parallel(ABC)\Rightarrow MN\parallel AC\Rightarrow\quad\frac{NC}{ND'}=\frac{MA}{MD'}$

Dar în $\Delta ACD'$ cevienele $D'O, AN, CM$ sunt concurente, deci, aplicând teorema lui Ceva obţinem:

$\frac{AO}{OC}\cdot\frac{NC}{ND}\cdot\frac{MD'}{MA}=1\Rightarrow\frac{OA}{OC}=1\Rightarrow OA=OC$ Analog dacă $EF\parallel BD\Rightarrow OB=OD$

Deci ABCD este parallelogram, rezultă că $ABCDA'B'C'D'$ e paralelipiped.

$"\Leftarrow"$

Dacă $ABCDA'B'C'D'$ e paralelipiped rezultă că ABCD e paralelogram, de unde rezultă că AO=OC şi OB=OD.

Dar în $\Delta ACD'$ cevienele $D'O, AN, CM$ sunt concurente, deci, aplicând teorema lui Ceva obţinem:

$\frac{AO}{OC}\cdot\frac{NC}{ND}\cdot\frac{MD'}{MA}=1\Rightarrow\frac{NC}{ND'}=\frac{MA}{MD}$, de unde rezultă prin reciproca teoremei lui Thales că $MN\parallel AC\Rightarrow MN\parallel(A'B'C')$

Analog se demonstrează că $EF\parallel(A'B'C')$

International Mathematical
"THE CLOCK – TOWER SCHOOL"
Contest
15^{th} **Edition 24.03.2012**
Râmnicu Vâlcea
PROBA "*LA CEAS*"
CLASA a V-a

Subiectul I

1. A=$\overline{a_1 a_2 a_3 ...... a_{2012}}$; $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2012} = 2011$. $a_1 a_2 a_3 \cdot ...... \cdot a_{2012} = ?$

2012 B) 0 C) 10000 D) $2011 \cdot 1006$ E) 2011

Prof. Gabriela Ene , I.S.J. Vâlcea

Soluţie:

$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2012} = 2011 \Rightarrow \exists a_k = 0; 1 \le k \le 2012 \Rightarrow a_1 a_2 a_3 \cdot ...... \cdot a_{2012} = 0$

2. $A = 16^{500} \cdot 625^{501} = \overline{a_1 a_2 ... a_n}$. n = ?

A) 2003 B) 2012 C) 2004 D) 2002 E) 2011

Prof. Cătălin Badea, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie:

$A = 16^{500} \cdot 625^{501} = 625 \cdot (16 \cdot 625)^{500} = 625 \cdot 10000^{500} = 625 \cdot (10^4)^{500} = 625 \cdot 10^{2000} = 625\underbrace{00...0}_{2000}$ → A are 2003 cifre.

3. $A = \{\overline{abcd} \mid$ abcd=105$\}$. Card A = ?

a) 42 b) 6 c) 24 d) 12 e) 50

Prof. Alin Badea, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie:

abcd=105=1·3·5·7. Card A = 4! = 24.

Subiectul II

4. $(a_n)_{n \in N^*}$: 2 ; 5 ; 9 ; 14 ; 20 ;………; a_{17} ; .... a_{17} = ?

A) 152 B) 189 C) 160 D) 170 E) 185

Prof. Gabriela Vărzaru, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie:

a_n=2+3+4+5+...+n+(n+1) =(n+1)(n+2):2 – 1; a_{17}=18·19:2-1=170.

5. $2012 \cdot \underbrace{111...111}_{2011\,cifre} = x; x = \overline{a_1 a_2 ... a_k}$

$S = a_1 + a_2 + ... + a_k$. $S = ?$

A) 10 055 B) 8040 C) 8048 D) 2012 E) 10 060

Prof. Cristina Pîrvuţă, Şcoala Nr. 10 , Rm. Vâlcea

Soluţie:

$$2012\cdot\underbrace{111...111}_{2011\,cifre}=x=(2000+10+2)\cdot\underbrace{11...1}_{2011}=2000\cdot\underbrace{11...1}_{2011}+10\cdot\underbrace{11...1}_{2011}+2\cdot\underbrace{11...1}_{2011}=$$

$$\underbrace{22...2}_{2011}000+\underbrace{11...1}_{2011}0+\underbrace{22...2}_{2011}=\underbrace{22355...55332}_{2014}.$$

$$S=2+2+3+5\cdot 2008+3+3+2=10055.$$

6. a,b,c $\in$ N; ab + ac = 16 ; ac + bc=25 ; c-a = 3 b =?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 3

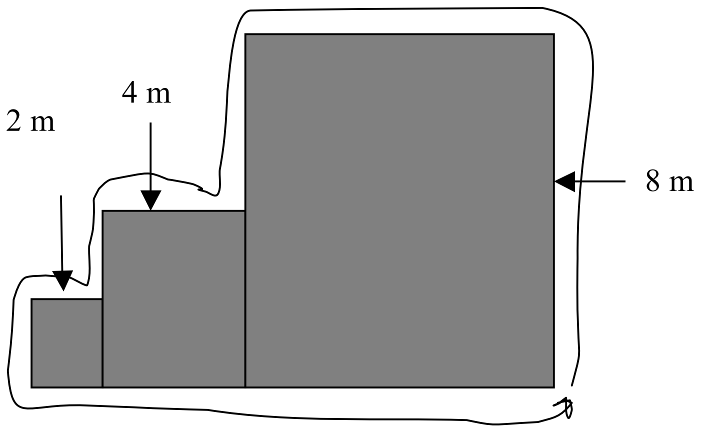
Prof. Pîslaru Anca , CN “Mircea cel Bătrân” , Rm. Vâlcea

Soluţie:

Din relaţia ac+bc=25 scădem relaţia ab+ac=16 şi obţinem: b(c-a)=9 $\Leftrightarrow$ 3b=9 $\Leftrightarrow$ b=3.

Subiectul III

7.



? m

A) 44 m ; B) 40 m ; C)48 m; D) 50 m; E)46 m.

Prof. Alin Badea, CNI “*Matei Basarab*”, Rm. Vâlcea

Soluţie: Perimetrul=(8+8+4+4+2+2+2+2+4+8)m=44m

8.

20	a	b	c	12

a,b,c $\in$ N; 20ac=4 760 ; 12bc=2 520. a + b + c =?

A) 44 B) 45 C) 48 D) 50 E) 46

Prof. Gh. Radu, CNI “*Matei Basarab*” , Rm. Vâlcea

Soluţie:

ac=238; bc=210 şi 20>a>b>c>12 $\Leftrightarrow$ ac=2· 7· 17; bc=2· 3· 5· 7 şi 20>a>b>c>12

$\rightarrow$ a=17; b=15; c=14.

9. $1225:[(13\cdot x-30):3-10]=7$

A) 40 B) 55 C) 45 D) 50 E) 46

Prof. Marcel Giurgiulescu , Şc. „Take Ionescu”, Rm. Vâlcea

Soluţie:

$$[(13\cdot x-30):3-10]=1225:7\Leftrightarrow(13\cdot x-30):3-10=175\Leftrightarrow(13\cdot x-30):3=175+10\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(13x-30):3=185\Leftrightarrow 13x-30=185\cdot 3\Leftrightarrow 13x-30=555\Leftrightarrow 13x=555+30\Leftrightarrow$$

$$13x=585\Leftrightarrow x=45.$$

International Mathematical
"THE CLOCK – TOWER SCHOOL"
Contest
15^{th} **Edition 24.03.2012**
Râmnicu Vâlcea
PROBA "*LA CEAS*"
CLASA a VI-a

1.

1,11(36)=$\dfrac{m}{n}$, m,n$\in$N*, (m;n)=1 .   m+n=?

A) 84   B) 75   C) 101   D) 93   E) 69

Prof. Gh. Radu, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie: $1{,}11(36) = \dfrac{11136-111}{9900} = \dfrac{11025}{9900} = \dfrac{49}{44} = \dfrac{m}{n}; (49;44) = 1 \Rightarrow 49 + 44 = 93$

2.

$a = 3^{2012}, n \in N$; $b = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 200$; $(a,b) = 3^n$.   n=?

A) 48   B) 46   C) 50   D) 47   E) 44

Elev Ungureanu Alexandru, CN "Alexandru Lahovari" , Rm. Vâlcea

Soluţie: b = 2^{100} · 100!. $k = \left[\dfrac{100}{3}\right] + \left[\dfrac{100}{3^2}\right] + \left[\dfrac{100}{3^3}\right] + \left[\dfrac{100}{3^4}\right] + \ldots. = 33 + 11 + 3 + 1 + 0 + \ldots = 48$.

3^{48}divide pe b şi 3^{49} nu divide pe b, prin urmare n=48.

3.

$\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{y}{y+2} = \dfrac{z}{z+3} = \dfrac{2}{3}$;   x + y + z = ?

A) 6   B) 10   C) 12   D) 2   E) 4

Prof. Ion Stănciulescu , Şc. „Take Ionescu", Rm. Vâlcea

Soluţie: Scădem din numitori numărătorii şi obţinem:

$\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{31} = 2 \Rightarrow x = 2; y = 4; z = 6 \Rightarrow x + y + z = 12$

4. $a,b \in N^*; [a,b] = 2012; a \cdot b = 1006^2$.   (a,b) = ?

A) 305   B) 4   C) 1006   D) 503   E) 212

Prof. Constantin Popescu , Şc. „Take Ionescu" , Rm. Vâlcea

Soluţie: [a;b] · (a;b) = a · b $\Leftrightarrow$ (a;b) = 1006^2 : 2012 = 503.

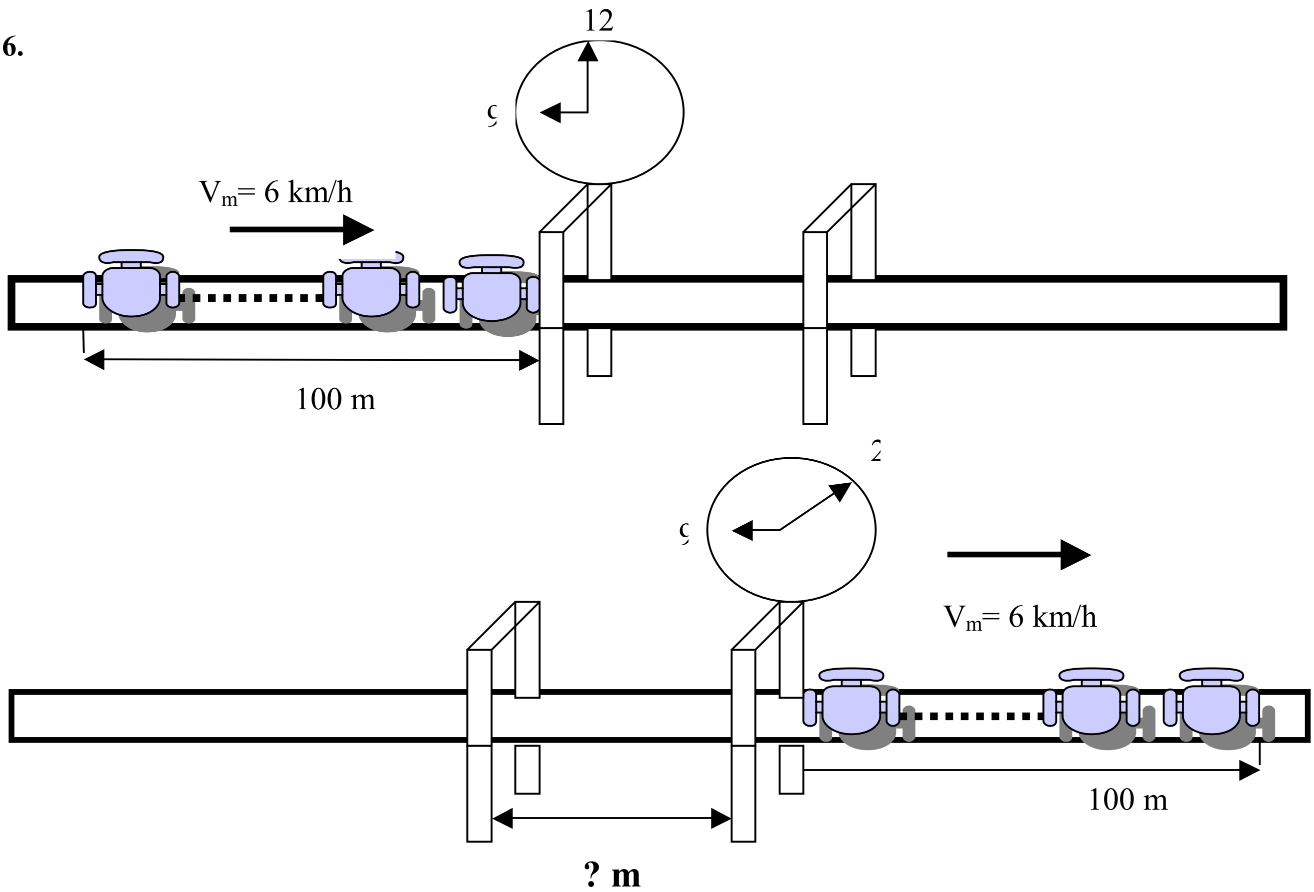
5. $x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2011} + \dfrac{1}{2012}$; $y = \dfrac{5}{2} + \dfrac{8}{3} + \dfrac{11}{4} + \ldots + \dfrac{6032}{2011} + \dfrac{6035}{2012}$; $x + y = ?$

A) 6036   B) 4024   C) 2012   D) 6066   E) 6033

Prof. Mazilu Marin , CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie: $x + y = \dfrac{6}{2} + \dfrac{9}{3} + \dfrac{12}{4} + \ldots\ldots. + \dfrac{6036}{2012} = \underbrace{3 + 3 + 3 + \ldots. + 3}_{2011 \quad termeni} = 3 \cdot 2011 = 6033.$

6.

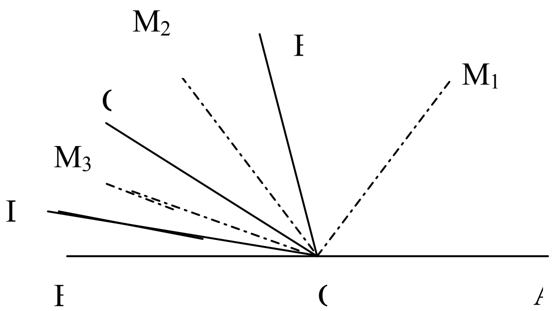


A) 1000 m B) 950 m C) 900 m D) 1200 m E) 600m Prof. Gh. Radu, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie: v=$\frac{6km}{1h}=\frac{6000m}{3600s}=\frac{5}{3}m/s$; $t=10\min=600s$; $d=v\cdot t=\frac{5}{3}m/s\cdot 600s=1000m$

Lungimea podului = 1000m – 100m = 900m.

7.



$\angle AOM_1 \equiv \angle M_1OB \equiv \angle BOC$
$\angle BOM_2 \equiv \angle M_2OC \equiv \angle COD$
$\angle COM_3 \equiv \angle M_3OD \equiv \angle DOE$ m($\angle M_1OM_3$) = ? ^{0}

A) 100^0 B) 88^0 C) 104^0 D) 108^0

Soluţie:
m($\angle COM_3$) ≡ m($\angle M_3OD$) ≡ m($\angle DOE$)=x^0; m($\angle BOM_2$) ≡ m($\angle M_2OC$) ≡ m($\angle COD$)=2x , m($\angle AOM_1$)≡m($\angle M_1OB$)≡m($\angle BOC$)=$4x^0$→m($\angle AOE$)=$15x^0=180^0$→x=12→m($\angle M_1OM_3$)=108^0

8. $a,b,c\in N^*$, $\frac{a+b+c}{3}=16$, $ab+bc+ac=747.$, $a^2+b^2+c^2=?$

A) 684; B) 1047 ; C) 810; D) 920; E) 984 Prof. Gabriela Cocoş, CNI "Matei Basarab", Rm. Vâlcea

Soluţie:
a+b+c=48. Înmulţim succesiv relaţia cu a, b şi c, apoi adunăm relaţiile obţinute şi obţinem:
$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=48(a+b+c) \rightarrow a^2+b^2+c^2=48^2-2\cdot 747=810$.

9.

A = {0, 11, 22, 33, ..., 2013}; B = {2, 4, 6, ... , 2300}. $\frac{CardA}{CardB}=p\%$. p=?

A) 2,5 B) 16 C) 20 D) 15 E) 120

Prof. Mariana Saraolu , Şc. „Take Ionescu" , Rm. Vâlcea

Soluţie:
$\frac{CardA}{CardB}=\frac{184}{1150}=\frac{4}{25}=\frac{16}{100}=16\%$.

International Mathematical
"THE CLOCK – TOWER SCHOOL"
Contest
15^{th} **Edition 24.03.2012**
Râmnicu Vâlcea
PROBA "*LA CEAS*"
CLASA a VII-a

1. $S = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + ... + \frac{1}{100\cdot 103}$; S = ?

A) $\frac{33}{103}$; B) $\frac{30}{103}$ C) $\frac{33}{102}$ D) 1 E) $\frac{34}{103}$

Prof. Badea Aurel, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie: $S = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + ... + \frac{1}{100} - \frac{1}{103}\right) == \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{103}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{102}{103} = \frac{34}{103}.$

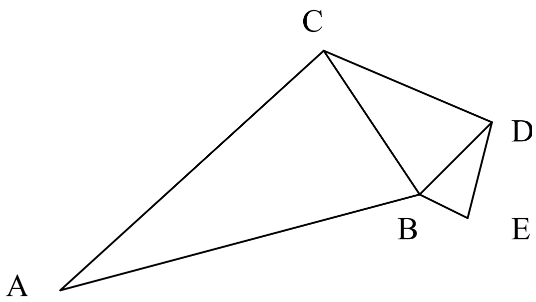
2. $\frac{111}{78} = \overline{1, a_0 a_1 a_2 .....a_{2012}....}$; $a_{2012} = ?$

A) 6 B) 3 C) 2 D) 7 E) 9

Prof. Badea Alin, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie: $\frac{111}{78} = \frac{37}{26} = 1{,}4(230769)$; $(2013-1):6 = 2012:6 = 335 rest 2 \Rightarrow a_{2012} = 3$

3. $\angle BAC \equiv \angle BCD \equiv \angle BDE = 30^0$.
[AB] ≡ [AC] ; [BC] ≡ [CD]; [BD] ≡ [DE].
$\frac{AB}{BE} = ?$



A) $\frac{5BC}{2DB}$; B) $\frac{BC}{BD}$; C) $\left(\frac{BC}{BD}\right)^3$; D) $\frac{4BC}{3BD}$; E) $\left(\frac{BC}{BD}\right)^2$

Prof. Gh. Radu, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie: Δ ABC ~ Δ CBD ~ Δ DBE $\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE}; \frac{BD}{BE} = \frac{BC}{BD}$. Înmulţim relaţiile şi obţinem:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BC^2}{BE\cdot BD} = \frac{BC^3}{BE\cdot BD\cdot BC} = \frac{BC^3}{BD\cdot BD^2} = \left(\frac{BC}{BD}\right)^3.$$

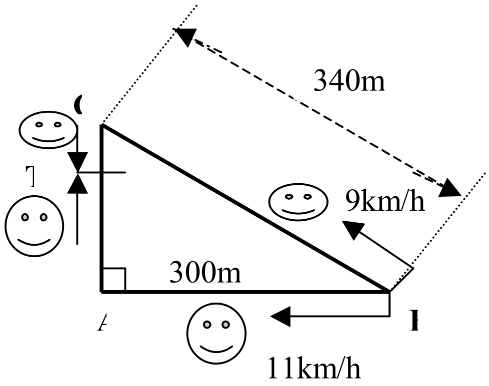
4. a >0 , b>0, c>0 ; a(b+c) = 2011; b(a+c) = 2012 ; c(a+b) = 2013
$(abc)^2 = ?$
A) 2010·2011·2012 B) 1005·1006·1007 C) 2011·2012·2013 D) 1004·1005·1006 E) 1005^3

Prof. Cătălin Badea, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie:
Adunăm relaţiile şi obţinem: ab+bc+ac=3018. Din această relaţie scădem, pe rând, relaţiile date şi obţinem: bc=1007; ac=1006; ab=1005.Înmulţim şi obţinem: $(abc)^2$= 1005.1006.1007.

5.

AT=? m



A) 150 B) 162 C) 135 D) 140 E) 22

Prof. Gh. Radu, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

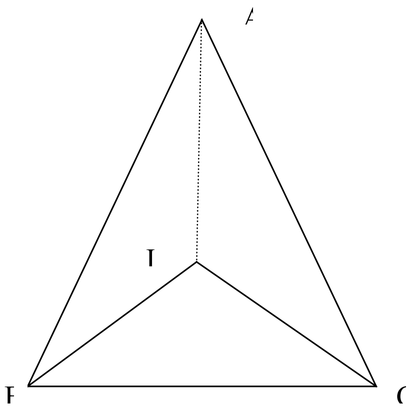
Soluţie:

AC=160m; v_1+v_2=20km/h=$\frac{50}{9}$ m/s; 800m:$\frac{50}{9}$ m/s=144 s; 11km/h=$\frac{55}{18}$ m/s;

$\frac{55}{18}$ m/s·144s = 440m; AT = 440m – 300m = 140 m.

6. $\angle ABI \equiv \angle CBI$, $\angle ACI \equiv \angle BCI$, m($\angle BAC$) = a^0. m ($\angle BIC$) = ?

A) $90^0 + \frac{a^0}{2}$ B) $90^0 - \frac{a^0}{2}$ C) $180^0 + \frac{a^0}{2}$ D) $180^0 - \frac{a^0}{2}$ E) 90^0



Prof. Delia Badea , Şcoala "*Take Ionescu*", Rm. Vâlcea

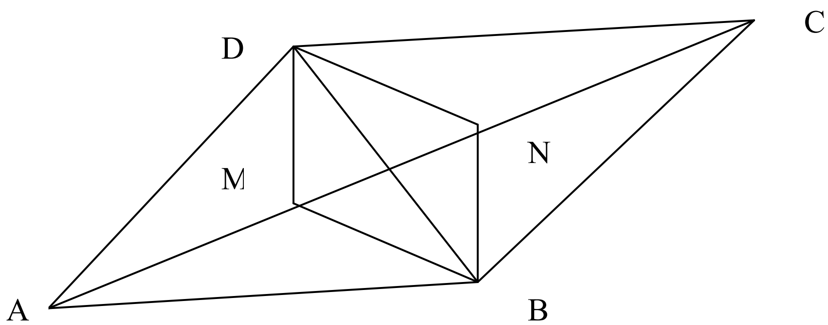
Soluţie: m ($\angle BIC$) = 90^0+ m ($\angle BAC$) :2 = $90^0 + \frac{a^0}{2}$.

7.

[DM] ≡ [MB] ≡ [BN] ≡ [DN]

[AM] ≡ [MN] ≡ [NC]

$\frac{S_{BNDM}}{S_{BCDN}} = ?$



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{3}$ D) 1 E) 2

Prof. Gh. Radu, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie: ABCD= romb → BNDM= romb. Fie {O}=AC∩BD. $S_{BNDM}=2\cdot S_{DMN}=MN\cdot DO=CN\cdot DO=2\cdot S_{CDN}=S_{BCDN}$ →
$\frac{S_{BNDM}}{S_{BCDN}}=1.$

8.

$9x^2-12x-5=(mx+n)(px+q)$ $\qquad m^{n+p+q}=?$

A) $\frac{1}{9}$; B) 3 C) 9 D) 1 E) $\frac{1}{3}$

Prof. Cristina Pîrvuţă, Şcoala Nr. 10 , Rm. Vâlcea

Soluţie: $9x^2-12x-5=(3x+1)(3x-5)=(mx+n)(px+q)$ → m=3, n=1, p=3, q=-5→ $m^{n+p+q}=3^{-1}=\frac{1}{3}$.

9. $x^2+x+4y^2-2y=-\frac{1}{2}$; $8xy=?$

A) 2 B) -1 C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) - 2

Prof. Maria Vasilescu , Şcoala "*Take Ionescu*", Rm. Vâlcea

Soluţie: $x^2+x+4y^2-2y=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2y-\frac{1}{2}\right)^2=0\Rightarrow(x;y)=(-\frac{1}{2};\frac{1}{4})\Rightarrow 8xy=-1.$

International Mathematical
"THE CLOCK – TOWER SCHOOL"
15^{th} Edition 24.03.2012
Râmnicu Vâlcea
PROBA "*LA CEAS*"
CLASA a VIII-a

1.

$$0{,}15a^2 = \frac{b^2}{1,(6)}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-6} = ?$$

A) $\frac{1}{16}$; B) 0,015625 C) 0,001 D) 1,1 E) $\frac{2}{625}$

Prof. Delia Badea , Şcoala "*Take Ionescu*", Rm. Vâlcea

Soluţie: $\frac{b^2}{a^2} = 0{,}15 \cdot 1,(6) = 0{,}25;\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-6} = \left(\frac{b}{a}\right)^{6} = \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{3} = 0{,}25^3 = 0{,}015625.$

2.

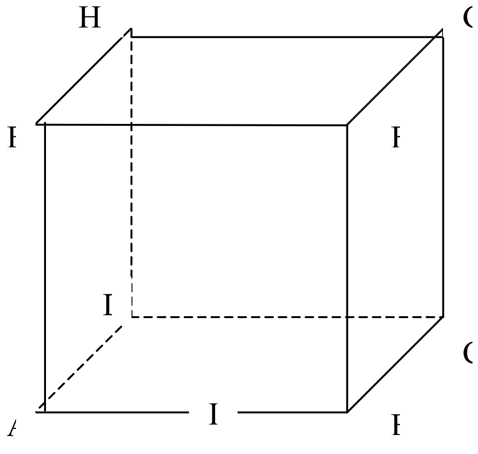
$$a = \sqrt{x^2 - 5{,}5x + 7{,}5625} - \sqrt{x^2 - 2{,}5x + 1{,}5625}, \qquad x \in (0;1{,}25). \qquad a = ?$$

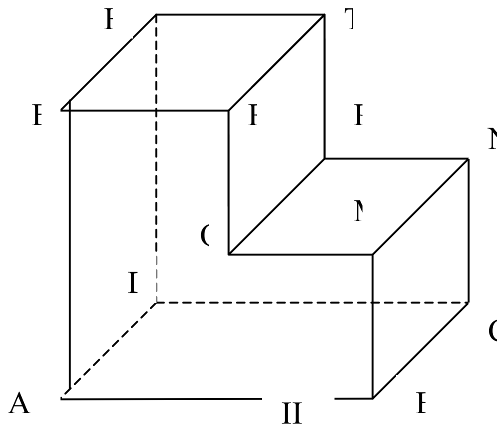
$A)\sqrt{6}$ $B)4$ $C)1{,}5$ $D)\sqrt{9{,}1350}$ $E)-2$

Prof. Cătălin Badea, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie: a=$|x-2{,}75| - |x-1{,}25|$. Cum 0<x<1,25, rezultă a= - (x-2,75)+(x-1,25)= 1,5.

3.





AB=BC=CG=GH=HE=EF=FG=FB=HD=AE=AD=CD; S_I = 384 m²
M$\in$(BF), N$\in$(CG), R$\in$(EF), T$\in$(GH)
BM=MF=CN=NG=ER=RF=HT=TG=MQ=NP=RQ=TP; S_{II} = ?
A) 352 m² B) 406 m² C) 532 m² D) 384 m² E)328 m²

Prof. Mazilu Marin, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie: $S_{II}=S_I - 2\cdot S_{NGTP}=384m^2 - 2\cdot 16m^2=352m^2$.

4. $\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{a}{b}+1\right)^2} = \frac{c}{d} - 4;\quad a,b,c,d \in Z^*. \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d} = ?$

A) $\sqrt{6}$ B) $4-\sqrt{6}$ C) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ D) -5 E) 3

Insp. Ileana Florentina Dicu , I.S.J. Vâlcea

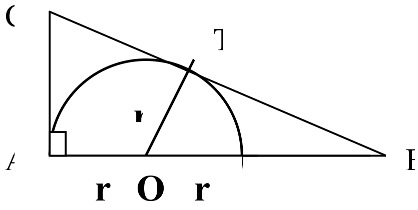
Soluţie:

$$\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{a}{b}+1\right)^2} = \frac{c}{d} - 4 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left|\frac{a}{b}+1\right| = \frac{c}{d} - 4.$$

Cum $\left|\frac{a}{b}+1\right| \in Z, \frac{c}{d}-4 \in Z \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left|\frac{a}{b}+1\right| \in Z \Leftrightarrow \left|\frac{a}{b}+1\right| = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = -1, respectiv \frac{c}{d} = 4 \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{c}{d} = 3$

5.

AB=2a
AC=a
OT $\perp$ BC
r = ?



A) $\frac{(\sqrt{5}-1)\cdot a}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}\cdot a}{2}$ C) $\frac{(\sqrt{2}+1)\cdot a}{2}$ D) $\frac{a}{3}$ E) 0,8 a

Prof. Gh. Radu, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie:

sinB= $\frac{OT}{OB} = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \frac{r}{2a-r} = \frac{a}{a\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{r}{2a-r+r} = \frac{a}{a\sqrt{5}+a} \Leftrightarrow \frac{r}{2a} = \frac{1}{\sqrt{5}+1} \Rightarrow r = \frac{(\sqrt{5}-1)a}{2}$

6. $n = \sqrt{6-2\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+1$. n^2 = ?

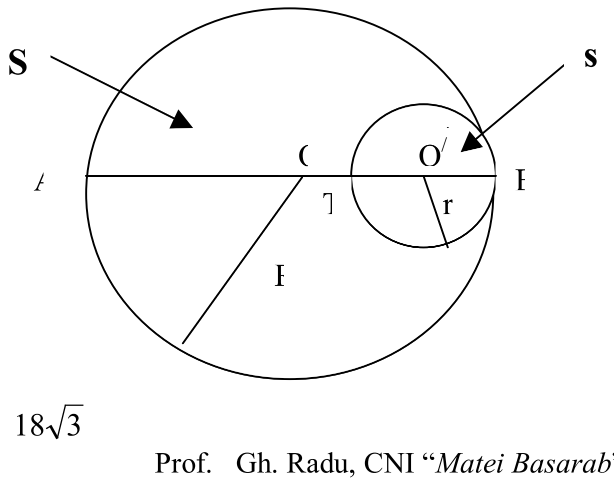
A) $\sqrt{6}$ B) 1 C) $2\sqrt{3}$ D) 7 E) 3

Prof. Ştefan Smărăndoiu, Şc. "Take Ionescu" , Rm. Vâlcea

Soluţie: $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3}+1; \sqrt{6-2(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1; n = \sqrt{3} \Rightarrow n^2 = 3.$

7.

S + s = 87π cm^2
AT = 6$\sqrt{3}$ cm
R·r = ?



A) 28 B) 30 C) 15 D) 24 E) $18\sqrt{3}$

Prof. Gh. Radu, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie:

S+s=87π $\Leftrightarrow$ R^2+r^2=87 $\Leftrightarrow$ (R-r)^2=87-2Rr. AT=2R-2r $\Leftrightarrow$ R-r=3$\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ Rr=30.

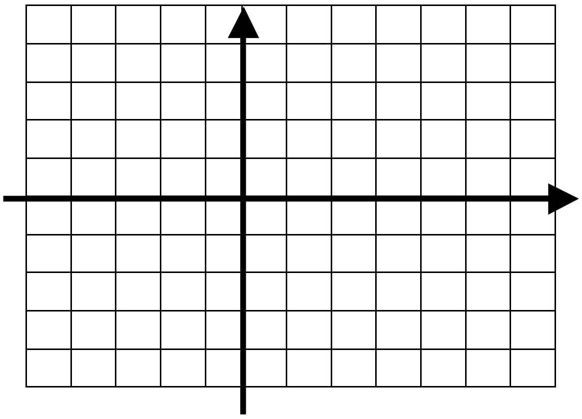
8.

A(- 4;0), B(6;0), C(x;y);

x,y$\in$ {….,-6;-5;-4;-3;-2;-1};

AC$\perp$ BC.

x +y= ?



A) 8 B) −8 C) - 6 D) -7 E) - 5

Prof. Dumitru Dobre, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie:

Fie M(1;0) mijlocul lui [AB] $\Rightarrow$ MC=AB:2=5, deci $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=5 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=25$. Cum x,y$\in$ {….,-6;-5;-4;-3;-2;-1} $\Rightarrow$(x,y) $\in$ {(-3,-3);(-2,-4)} $\Rightarrow$x+y=-6.

9. $n^2=102\cdot103\cdot104\cdot105+1$. n = ?

A) 10609 B) 10819 C) 10711 D) 10919 E) 10911

Prof. Marius Giurgiu, Şcoala "Anton Pann" , Rm. Vâlcea

Soluţie:

$n^2=102\cdot103\cdot104\cdot105+1$=(100+2)(100+5)(100+3)(100+4)+1=10710·(10710+2)+1=10710^2+2·10710+1=($10711^2 \Rightarrow$ n = 10711.

The Mathematics Contest
„THE CLOCK – TOWER SCHOOL"
15th Edition
Râmnicu Vâlcea
23-25.03.2012
Juniors II

1. Se consideră tabloul de numere:

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
....

a) Să se afle primul număr de pe rândul 2012;
b) Să se afle suma numerelor de pe rândul 2012;
c) Notăm cu a_i ultimul număr de pe linia *i*. Să se calculeze $a_1+a_2+...+a_{2012}$. Generalizati!

Vlad NEACŞU – Rm. Vâlcea

BAREM:

Se observă că ultimul număr de pe linia i este $\frac{i(i+1)}{2}$...1p

Ultimul număr de pe rândul 2011 este $\frac{2011\cdot2012}{2}=2023066$

Deci primul număr de pe rândul 2012 este 2023066 + 1 = 2023067.................................1p
Primul număr de pe rândul 2012 este 2023067

Ultimul număr de pe rândul 2012 este $\frac{2012\cdot2013}{2}=2025078$ 1p

Suma numerelor va fi

$S=2023067+2023068+...+2025078=(1+2+3+...+2025078)-(1+2+3+...+2023066)=$

$=\dfrac{2025078\cdot 2025079}{2}-\dfrac{2023066\cdot 2023067}{2}==4\ 072\ 433\ 870$.....................................1p

$S=\dfrac{1\cdot 2}{2}+\dfrac{2\cdot 3}{2}+...+\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}=\dfrac{1^2+1+2^2+2+3^2+3+...+n^2+n}{2}$ $S=\dfrac{(1+2+3+...+n)+(1^2+2^2+3^2+...+n^2)}{2}=\dfrac{\frac{n\cdot(n+1)}{2}+\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}}{2}$

$S=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ ....2p Pt n=2012 avem S = 1 359 502 364.............................1p

2. Se consideră un triunghi ABC cu $\sphericalangle B\equiv\sphericalangle C$. Pe (AB) se ia un punct D, iar pe $(AC-[AC]$ se ia un punct E, astfel încât D şi E sunt simetrice faţă de F, unde $\{F\}=DE\cap BC$. Arătaţi că $[BD]\equiv[CE]$.

Ştefan SMĂRĂNDOIU – Rm. Vâlcea

BAREM:

VARIANTA I

Fie $DD'\perp BC$ 2p

$\Delta DD'F\equiv\Delta EE'F$ 2p

$[DD']\equiv[EE']$ 1p

$\Delta BDD'\equiv\Delta CEE'\Rightarrow[BD]\equiv[CE]$ 2p

VARIANTA a II-a

Fie T simetricul lui E faţă de C..2p

$[CF]$ este linie mijlocie în ΔETD .... 1 p

$\Rightarrow[CT]\equiv[CE]$ .... 1 p

$[AD]\equiv[AT]$ .... 2 p

$[BD]\equiv[CE]$ .... 1 p

3. Cifrele unui număr sunt rearanjate (se schimbă ordinea lor). Numărul obtinut se adună cu cel initial. Dacă suma obtinută este egală cu 10^{2012}, demonstrati că numărul initial se divide cu 10.

Constantin BĂRĂSCU – Rm. Vâlcea

BAREM:

Fie *a* numărul initial si *b* numărul obtinut după rearanjarea cifrelor.

Notam cu $S(a)$ suma cifrelor numărului *a*.

Presupunem că *a* nu se divide cu 10. ....1p

Deci, U(a)≠0...1p

Cum $a+b=10^{2012}$, deci suma dintre ultima cifră a lui *a* si ultima cifră a lui *b* este egală cu 10..2p

Iar suma cifrelor numerelor *a* si *b* din celelalte 2011 pozitii este 9 (*a* si *b* sunt asezate unul sub celălalt la adunare!)..1p

Deci $S(a)+S(b)=2S(a)=9\cdot 2011+10$ (F), q.e.d..2p

4. Este dată o tablă de dimensiuni 1 × 2012. În primele 7 pătrate din stânga tablei sunt plasate 7 monede, câte o monedă în fiecare pătrăţel. Doi elevi joacă un joc după următoarele reguli: se ia orice monedă şi se mută în dreapta cu un număr oarecare de pătrăţele, cu condiţia că două monede nu pot fi plasate în acelaşi pătrăţel şi nici nu se poate sări peste o altă monedă. Pierde acel elev care nu mai poate efectua mişcări. Aflaţi strategia câştigătoare şi elevul care câştigă conform acestei strategii, dacă ambii joacă corect.

Marcel TELEUCĂ – Chisinău

BAREM:

Întotdeauna câstigă primul elev. 1p

Notăm monedele cu A,B,C,D,E,F,G în ordinea respectivă. Primul elev miscă moneda G până la coltul tablei........3p

Fie monedele E si F colorate în rosu, C si D în galben, A si B în albastru...............................1p

La fiecare miscare efectuată de al doilea elev primul răspunde cu miscarea monedei de aceeasi culoare la acelasi număr de pasi...2p