INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BIHOR

SIMULAREA EXAMENULUI DE BACALAUREAT 2013

Proba E. c)
Matematică M_*şt-nat*

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p 1. Justificaţi că dacă f: $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{2012, -2013, 2014\}$ este o funcţie injectivă, atunci f(1)+ f(2)+ f(3)= 2013.

5p 2. Calculaţi: $(1-i)\,(1-i^2)\,(1-i^3)\dots\,(1-i^{2013})$

5p 3. Calculaţi numărul diagonalelor unui poligon convex cu 2013 laturi.

5p 4. Rezolvaţi ecuaţia $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 14$

5p 5. Calculaţi $\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)$ ştiind că A (-1, -15), B (9, -25), C (-2013, 2012)

5p 6. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC în care sin B + cos B = sin C + cos C. Demonstraţi că triunghiul ABC este isoscel.

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1. Notăm $M_3(\{-1,1\})$ (mulţimea matricelor cu trei linii şi trei coloane, cu elemente din mulţimea $\{-1,1\}$), $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

5p a) Daţi un exemplu de matrice inversabilă din $M_3(\{-1,1\})$.

5p b) Demonstraţi că $A^n = 2^n \cdot I_3 + \frac{(-1)^n-2^n}{3}B$.

5p c) Determinaţi suma tuturor matricelor din $M_3(\{-1,1\})$.

2. Este cunoscut că (Z, ∗, ○) este un inel comutativ, unde x∗y = x+y-3 şi x○y = xy-3x-3y+12, $\forall\, x, y \in Z$.

5p a) Arătaţi că elementul neutru al legii de compoziţie ○ este 4;

5p b) Verificaţi dacă inelul are divizori ai lui zero.

5p c) Rezolvaţi ecuaţia $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2013 \text{ ori}} = 2^{2014}+3$ ştiind că $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ ori}} = (x-3)^n+3$

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia f:(0,∞) → R, f(x)= $\ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$

5p a) Să se calculeze derivata funcţiei f.

5p b) Să se determine punctele graficului funcţiei f în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta de ecuaţie 9y=2x.

5p c) Să se arate că, dacă x>1, atunci şi $\ln x \geq \frac{2(x-1)}{x+1}$.

2. Fie f:$(0,\frac{\pi}{2}) \rightarrow (0,\infty)$, f(x)= $\int_0^x \frac{(\sin t+\cos t)\sin t}{\cos^2 t}\,dt$

5p a) Să se calculze f$(\frac{\pi}{4})$

5p b) Să se arate că f este funcţie strict crescătoare.

5p c) Să se calculeze limita raportului $\frac{f(x)}{x^2}$ pentru $x \rightarrow 0, x > 0$

INSPECTORATUL
ŞCOLAR JUDEŢEAN
BIHOR

Simularea examenului de bacalaureat 2013

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Subiectul I **(30 de puncte)**

5p 1. Să se afle modulul numărului complex $z = (3+4i)^2$.

5p 2. Se consideră punctele A(-1:2) şi B(3:4) în reperul cartezian xOy. Aflaţi distanţa de la punctul O la dreapta AB.

5p 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $|x-2| = 2x+1$.

5p 4. Determinaţi numărul submulţimilor mulţimii {1,2,3,4,5}, care nu conţin elementul 4.

5p 5. Să se determine funcţia de gradul al doilea $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, pentru care f(-1)= -2, f(0)=1 şi f(-2)= -1.

5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu AB = 4, AC= $\sqrt{7}$ şi BC= $\sqrt{3}$. Aflaţi măsura unghiului B.

Subiectul al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

5p a) Să se calculeze det (X).

5p b) Să se determine X^{-1}.

5p c) Să se arate că $(X+I_3)^{2013} = 2^{2012}(X+I_3)$.

2. Pe mulţimea **R** se consideră legea de compoziţie $a * b=2ab-a-b+1$.

5p a) Să se arate că legea de compoziţie "*" este asociativă.

5p b) Să se afle elementul neutru al legii de compoziţie "*".

5p c) Să se rezolve în **R** ecuaţia $a*(a-1) = 0$.

Subiectul al III-lea **(30 de puncte)**

1. Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)= 2x^3-3x^2+1$.

5p a) Să se calculeze $f'(1)$.

5p b) Să se determine intervalele de convexitate şi intervalele de concavitate ale funcţiei f.

5p c) Să se arate că $f(x)\geq 0$, pentru $x \geq -0.5$.

2. Fie funcţia $f:[1, e]\to\mathbf{R}$, $f(x)= \sqrt{\ln x}$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 f(e^x)\,dx$.

5p b) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei Ox.

5p c) Să se arate că $\int_0^1 e^{x^2}\,dx + \int_1^e f(x)\,dx = e$.

Subiectul I **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x+2$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(8)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-(2m+3)x+5$. Să se determine valoarea lui m ştiind că vârful parabolei are abscisa egală cu $\frac{5}{2}$.
3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-x-2}=x-2$.
4. Să se calculeze numărul submulţimilor cu 2 elemente ale unei mulţimi care are 6 elemente.
5. Se consideră triunghiul cu vârfurile A(5,4), B(-1,6) şi C(3,-4). Calculaţi lungimea medianei dusă din vârful A.
6. Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că AB=6, AC=8 şi $m(\sphericalangle BAC)=120^\circ$.

Subiectul II I **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.
   a) Să se determine matricea A^2, unde $A^2=A\cdot A$.
   b) Să se demonstreze că $A^3=4A^2-5A+2I_3$.
   c) Să se determine numerele m,n, p ştiind că $A^{-1}=mA^2+nA+pI_3$, unde A^{-1} este inverse matricei A.
2. Pe mulţimea Z se consideră legile de copoziţie $x*y=x+y+1$, $x\circ y=ax+by-1$, cu $a,b\in\mathbf{Z}^*$ şi funcţia $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$, $f(x)=x+2$.
   a) Să se demonstreze că $x*(-1)=(-1)*x=x$, oricare ar fi $x\in\mathbf{Z}$.
   b) Să se determine $a,b\in\mathbf{Z}^*$ pentru care legea de compoziţie "$\circ$" este asociativă.
   c) Dacă a=b=1 să se arate că funcţia f este morfism între grupurile $(\mathbf{Z},*)$ şi $(\mathbf{Z},\circ)$.

Subiectul III **(30 de puncte)**

1. Fie funcţia $f:(1,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$.
   a) Să se calculeze $f'(x), x\in(1,\infty)$.
   b) Calculaţi $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-(2)}{x-2}$.
   c) Să se arate că funcţia f este descrescatoare pe intervalul $(1,\infty)$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=e^x-x$.
   a) Să se verifice că $\int_0^1 f(x)dx=e-\frac{3}{2}$.
   b) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.
   c) Calculaţi $\int_e^{e^2}\frac{f(\ln x)}{x}dx$.

BAREM Proba E. c)

Matematică M_tehnologic

Subiectul I

1. $f(1)+f(2)+...+f(8)=3+4+5+...+10=52$ **(5p)**

2. $x_V=-\frac{b}{2a}$ **(1p)** $\Rightarrow \frac{2m+3}{2}=\frac{5}{2}$ **(2p)** $\Rightarrow m=1$ **(2p).**

3. $x^2-x-2=x^2-4x+4$ **(2p)** $\Rightarrow x=2$ **(2p)** Verificare **(1p).**

4. $C_n^2=6$ **(1p)** $\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2}=6$ **(2p)** $\Rightarrow n=4$ **(2p).**

5. Fie M mijlocul segmentului BC. Atunci $x_M=\frac{x_B+x_C}{2}$ și $y_M=\frac{y_B+y_C}{2}$ **(1p).** Obţinem M(1,1) **(1p).** AM=5 **(3p).**

6. $A_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin(BAC)}{2}$ **(1p).** $\sin(120^\circ)=\sin(60^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(2p)**
$A_{\Delta ABC}=12\sqrt{3}$ **(2p).**

Subiectul II

1. a) $A^2=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$ **(5p)** b) $A^3=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}$ **(3p).** Verificarea relației $A^3=4A^2-5A+2I_3$. **(2p)**

c) $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&-2&2\end{pmatrix}$ **(2p).** Se obţin relaţiile $4m+2n+p=\frac{1}{2}$, m+n+p=1, 2m+n=-1 **(1p).** De aici $m=\frac{1}{2}$, $n=-2$ și $p=\frac{5}{2}$. **(2p).**

2. a) Din calcul direct rezultă cerința dorită **(5p).**

b) Ne folosim de $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$, $\forall x,y,z\in\mathbf{Z}$ **(1p).** Obţinem relaţia $x(a-a^2)+z(b^2-b)+a-b=0$ **(2p).** Rezultă a=b=1 **(2p).**

c) $f(x*y)=f(x)\circ f(y)$ $\forall x,y\in\mathbf{Z}$ **(1p).** $f(x*y)=x+y+3$ **(2p).** $f(x)\circ f(y)=x+y+3$ **(2p).**

Subiectul III

1. a) $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$ **(5p).** b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-(2)}{x-2}=f'(2)=-1$ **(5p).**

c) $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}>0$ $\forall x\in(1,\infty)$. Rezultă f este descrescătoare pe acest interval **(5p).**

2. a) $\int_0^1 f(x)dx=e^x-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=e-1-\frac{1}{2}=e-\frac{3}{2}$ **(5p).**

b) $\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 x(e^x-x)dx=\int_0^1 xe^xdx-\int_0^1 x^2dx$ **(1p).** $\int_0^1 xf(x)dx=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. **(4p).**

c) $\int_e^{e^2}\frac{f(\ln x)}{x}dx=\int_1^2 f(u)du$ **(2p).** $\int_1^2 f(u)du=e^u-\frac{u^2}{2}\Big|_1^2=e^2-e-2+\frac{1}{2}=e^2-e-\frac{3}{2}$. **(3p).**