Universitatea Valahia din Târgovişte
Facultatea de Ştiinţe şi Arte
Bd. Unirii 18, 130082 Târgovişte
Tel./Fax: 0040 245 213 382

Concursul Chindia, Ediţia a IX-a, Târgovişte 2 Martie 2013

Clasa a IX-a

Subiectul 1. În planul triunghiului ABC se consideră punctele P, Q, R astfel încât

$$5\overrightarrow{AP} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}, \quad 3\overrightarrow{AQ} + 2\overrightarrow{BQ} = \vec{0}, \quad 31\overrightarrow{RA} + 18\overrightarrow{RB} + 6\overrightarrow{RC} = \vec{0}.$$

a) Demonstraţi că punctele P, Q, R sunt coliniare.
b) Aflaţi valoarea raportului BM/MC, unde $M \in AR \cap BC$.

Mariana Coadă, Galaţi

Subiectul 2. Fie $a, b, c > 0$ cu $a + b + c = 3$. Demonstraţi că

$$\frac{a^2}{a+b^2} + \frac{b^2}{b+c^2} + \frac{c^2}{c+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Florin Stănescu, Găeşti

Subiectul 3. Determinaţi funcţiile $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ pentru care funcţia $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definită prin

$$g(n) = n(f(n+1) - f(n))$$

este periodică, adică există $T \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $g(n+T) = g(n)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$.

Florin Stănescu, Găeşti

Clasa a X-a

Subiectul 1. Daţi exemplu de un interval $[a, b] \subset (0, \infty)$ de lungime mai mare decât 0,09 cu proprietatea că $|2187^x - 2048^y| < 5$, oricare ar fi $x, y \in [a, b]$.

Cristinel Mortici, Târgovişte

Subiectul 2. Fie $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie strict crescătoare, cu proprietatea că

$$\frac{1}{x} + f(x) > 0 \quad \text{și} \quad f\left(\frac{1}{x} + f(x)\right) = \frac{1}{f(x)},$$

oricare ar fi $x > 0$. Calculaţi $f(1)$. Daţi exemplu de o astfel de funcţie.

Olimpiadă Grecia

Subiectul 3. Demonstraţi că pentru orice numere $a, b, c, x, y, z > 0$, are loc inegalitatea

$$\frac{ax}{y+z} + \frac{by}{z+x} + \frac{cz}{x+y} \geq \frac{2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ca} - a - b - c}{2}.$$

Marian Dincă, Bucureşti

Universitatea Valahia din Târgovişte
Facultatea de Ştiinţe şi Arte
Bd. Unirii 18, 130082 Târgovişte
Tel./Fax: 0040 245 213 382

Concursul Chindia, Ediţia a IX-a, Târgovişte 2 Martie 2013

Clasa a XI-a

Subiectul 1. Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset [2,\infty)$ un şir cu proprietatea că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_{n+1} + x_n^2 \leq 4x_n - \frac{3}{2} \quad \text{și} \quad x_{n+2} \leq x_{n+1}^2 - 4x_{n+1} + 6.$$

Demonstraţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit şi monoton, apoi determinaţi limita sa.

Romeo Zamfir, Galaţi

Subiectul 2. Se consideră o funcţie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă în zero pentru care este definit şirul

$$a_n = \left(\frac{n}{n + f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

a) Studiaţi convergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ în cazul când $f(0) \notin \{0,-2\}$.
b) Daţi exemplu de o funcţie f cu $f(0) = 0$ astfel încât şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ să fie convergent.
c) Daţi exemplu de o funcţie f cu $f(0) = -2$ astfel încât şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ să fie divergent.

Dinu Teodorescu, Târgovişte

Subiectul 3. Fie numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ diferite oricare două, cu $n \geq 2$, iar pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^*$, definim matricele $A_k = \left(\left(a_i + b_j\right)^k\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Determinaţi în funcţie de n, cea mai mică valoare a lui k astfel încât $\det A_k \neq 0$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Clasa a XII-a

Subiectul 1. Calculaţi, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, integrala

$$I_n = \int \frac{2x^3 + 9x^2 + 17x + 12}{(x^2 + 3x + 3)^n} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Romeo Zamfir, Galaţi

Subiectul 2. Determinaţi funcţiile continue $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x) - \int_0^1 (x + y) f(y)\, dy = x, \quad \text{oricare ar fi } x \in [0,1].$$

* * *

Subiectul 3. Fie G un grup abelian şi $x_1, x_2 \in G$. Definim $y = x_1^m x_2^n$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$ sunt prime între ele. Demonstraţi că există $z \in G$ astfel încât $x_1, x_2 \in \{y^p z^q \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$.

Cristinel Mortici, Târgovişte